Міністерство освіти і науки України

Кафедра алгебри та геометрії

Курсова робота

з геометрії на тему:

«Аксіоматика шкільного курсу геометрії»

м. Житомир - 2014 рік

Зміст

Вступ

РОЗДІЛ I. АКСІОМАТИЧНА ПОБУДОВА ГЕОМЕТРІЇ.

.1 Розвиток аксіоматичного методу

.2 Різні підходи та трактування логічних основ геометрії

РОЗДІЛ II. ОГЛЯД РІЗНИХ ПІДХОДІВ ДО АКСІОМАТИЧНОЇ ПОБУДОВИ ШКІЛЬНОГО КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ.

.1 Короткий історичний огляд розвитку аксіоматичного методу

.2 Система аксіом О.Д. Александрова

.3 Система аксіом О.В. Погорєлова

.4 Система аксіом Л.С. Атанасяна

РОЗДІЛ III. АКСІОМАТИКА ШКІЛЬНОГО КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ ЗА ПІДРУЧНИКОМ БУРДА М.І., ТАРАСЕНКОВА Н.А. ГЕОМЕТРІЯ.

.1 Загальна характеристика підручника геометрії

.2 Аксіоматика підручника

Висновки

Список використаних джерел

Додаток 1

ВСТУП

Аксіоматичний метод - спосіб побудови наукової теорії, за яким в її основу покладені деякі вихідні положення (судження) - аксіоми або постулати, з яких всі інші твердження цієї теорії (теореми) повинні виводитися шляхом чисто логічних міркувань, що їх називають доведеннями. Логічні правила цих міркувань строго фіксовані. В межах теорії залишається невизначеною невелика кількість вихідних понять (хоча можна вважати, що аксіоми є їхніми непрямими означеннями). На основі вихідних понять шляхом явних означень вводяться всі інші поняття теорії. На основі означень і аксіом доводяться теореми.

Найважливішою вимогою до системи аксіом є її несуперечливість, що можна розуміти так: скільки б теорем з цих аксіом ми не доводили, серед них не буде двох теорем, які суперечать одна одній. Суперечлива аксіоматика не може бути основою для побудови змістової теорії.

У шкільній геометрії важливу роль відіграє аксіоматичний метод. Питання, пов'язані з цим методом, завжди були в центрі уваги математиків. Зародившись в працях давньогрецьких вчених і узагальнений в "Початках" Евкліда, аксіоматичний метод отримав розвиток у роботах Герона Олександрійського (I ст. до н.е. - I ст. н.е.), Порфирія Сирійського (III ст.), Паппи Олександрійського (III ст.), Прокла (V ст.) та ін. Аксіоматичному методу були присвячені роботи вчених Сходу: Ал-Джаухарі, Сабіт ібн Коррі, Ібн Ал-Хайсама, Ал-Біруні, Омара Хайяма та ін.. Особливий розвиток аксіоматичний метод одержав у період Відродження, коли його стали застосовувати до інших областей знання - фізиці, етиці, юридичним наукам. Незважаючи на те, що проблема суворого обґрунтування геометрії на аксіоматичної основі була незалежно один від одного вирішена на рубежі XIX і XX століть у працях М. Пієрі, Д. Гільберта і В.Ф.Кагана, питання, пов'язані з аксіоматичним методом, залишилися в центрі уваги методичної думки.

Рішення проблеми аксіоматичного побудови шкільного курсу геометрії у школі ми знаходимо у підручниках М. Є. Ващенко-Захарченко, С.Е.Гурьева, А. Ю. Давидова, А.П.Кіселева, А. Н. Колмогорова, М.М. Нікітіна, А. В. Погорєлова, В.А.Гусева, в роботах авторських колективів Л.С.Атанасян (В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадомцев, Е.Г.Позняк, І.І.Юдіна); А.Д.Александрова (А.Л.Вернер, В. І. Рижик); Г.П.Бевза (В.Г.Бевз, Н.Г.Владімірова); В.Г.Болтянского (М. Б. Волович, А . Д. Семушина); В.М. Клопскійго (3. А. Скопець, М. І. Ягодовский); А. Н. Колмогорова (А.Ф.Семеновіч, Р.С.Черкасов); В.Н.Руденко, Г.А. Бахуріна та ін. Тому тема курсової роботи є актуальною, має важливе теоретичне й практичне значення і потребує подальшого розроблення.

Предмет дослідження - аксіоматичний метод в шкільному курсі планіметрії і шляхи формування в учнів умінь продуктивно використовувати його при вивченні геометрії.

Мета роботи: розкрити суть аксіоматичного методу, логічних основ побудови шкільного курсу геометрії і ретроспектива їх співвідношень на практиці.

Для досягнення поставленої мети потрібно вирішити такі завдання:

. Дослідити теоретичні основи даної теми, розглянути різні підходи до застосування аксіоматичного методу в курсі геометрії.

. Обґрунтувати та розробити теоретичні основи вивчення аксіоматичного методу в шкільному курсі планіметрії.

. Визначити оптимальні умови вивчення основ аксіоматики в навчанні геометрії.

Для досягнення поставлених задач використовувались такі методи дослідження, як інформаційно-пошуковий, порівняльний та статистичний, критичний аналіз джерел, прогнозування.

Початкові поняття і аксіоми запозичують з досвіду. Тому очікується, що всі факти, доведені в аксіоматичній теорії, мають тісний зв'язок з життям і можуть бути використані в практичній діяльності людини.

РОЗДІЛ I. АКСІОМАТИЧНА ПОБУДОВА ГЕОМЕТРІЇ

1.1 Розвиток аксіоматичного методу

Аксіоматичний метод широко застосовується в математиці, математичній логіці, у деяких розділах фізики і біології. І все ж за межами логіко-математичних наук сфера його застосування незначна.

У розвитку аксіоматичного методу розрізняють три етапи:

Перший етап - період змістової аксіоматизації, характеризується аксіоматичною побудовою силогістики в працях Аристотеля і геометрії в «Началах» Евкліда. Особливістю цього періоду є змістове застосування аксіоматичного методу. На цей час ще не існувало точного опису структури доведення, в міркуваннях використовувалися посилання на геометричну очевидність та інтуїцію, введення термінів відбувалося без необхідної чіткості та однозначності.

На другому етапі - період напівформальної аксіоматизації (кінець XIX початок XX століття) відбувається поступове звільнення від спроб змістової аксіоматичної побудови теорій і перехід до формального розуміння аксіоматичного методу. Перехід від змістового аксіоматичного методу до напівформального був підготовлений відкриттям неевклідової геометрії М.І.Лобачевским (1829).

На третьому - період формальної аксіоматизації, аксіоматичний метод розуміють як спосіб конструювання формалізованих мовних систем, що веде до чіткого розрізнення штучної формалізованої мови і тієї змістової предметної області, яка в ній відображена.

До XIX століття зразком логічної строгості були «Начала» Евкліда, аж допоки не виявилися суттєві недоліки в їх побудові. Строге аксіоматичне обґрунтування геометрії Евкліда вперше було здійснено наприкінці XIX століття в роботах М. Пієрі (1860 - 1904), Д. Гільберта (1862 - 1943), В.Ф.Кагана (1869 - 1953) та інших. Найбільшу популярність мала система аксіом, сформульована Д. Гільбертом в роботі «Основи геометрії» (1899).

Існують різні системи обґрунтування геометрії, які уможливлюють виведення із запропонованих аксіом усіх теорем евклідової геометрії.

I. Системи аксіом евклідової геометрії, які приймають за вихідне поняття «рух» (М.Пієрі, Ф.Шур, Віллерс, Ф.Бахман, А.Дельсерт).

II. «Метричні» системи аксіом евклідової геометрії (В.Ф.Каган, О.Верлен, Р.Л.Мур, Дж.Д.Біркгоф, О.В.Погорєлов).. Векторна аксіоматика евклідової геометрії (Г.Вейль).

Але формально вони еквівалентні, а відрізняються лише методичними підходами до побудови курсу геометрії.

Логічні основи геометрії - це фундамент геометрії, який має відповідати вимогам логіки. А логіка (від давньогрецького λογος - слово, розум, міркування) - наука, яка досліджує впорядкованість людського мислення, його закони, форми і прийоми. Основними законами логіки називають закони тотожності, суперечності, виключення третього і достатньої підстави, оскільки вони виражають базові риси логічно правильного мислення. А саме: визначеність, послідовність, несуперечливість і обґрунтованість думки. Основними категоріями логіки є: поняття (їх види і означення), судження, закони логіки, твердження (їх види і доведення), задачі (їх види і розв’язання) тощо. Отже, будувати шкільний курс геометрії на логічних основах - це означає всі його поняття, означення, класифікації, твердження, їх доведення, задачі тощо подавати відповідно до вимог логіки. Усі складові частини підручника геометрії мають бути коректно викладені з погляду логіки. Досягти цього не легко, але треба.

Вичерпну систематизацію логічних напрямів побудови курсу геометрії було створено Міжнародною комісією з викладання математики на Міланській конференції в 1914 році. Вона містить чотири напрями:

§ А - формально-логічний;

§ В - досвідно-дедуктивний (рівень ВА , ВВ , ВС );

§ С - інтуїтивно-дедуктивний;

§ О - інтуїтивно-експериментальний.

Напрям А - характеризується повним відмовленням від інтуїції. Основні поняття (точка, пряма тощо) означаються неявно через аксіоми.

Особливістю напряму В є те, що основні поняття і відношення запозичуються з досвіду. Всі інші міркування та етапи побудови здійснюються дедуктивно. В межах цього напряму розрізняють три рівні:

Ш ВА - формулюються всі необхідні аксіоми;

Ш ВВ - явно подається тільки частина аксіом;

Ш ВС - формулюються тільки ті аксіоми, зміст яких не здається очевидним.

Напрям С - інтуїтивно-дедуктивний. В побудові курсу одночасно використовується інтуїція і строгі доведення, які не відокремлюються одна від одного.

Напрям В - інтуїтивно-експериментальний. В побудові курсу геометрії такого рівня основні поняття і відношення запозичуються з досвіду, геометричні факти встановлюють за допомогою експерименту.

Логічні основи побудови шкільної геометрії традиційно пов’язували з аксіоматичним методом, «Началами» Евкліда та підручниками «Геометрії» академіків А.М. Колмогорова і О.В.Погорєлова. Майже 30 років логічну будову шкільної геометрії ототожнювали зі створенням аксіоматичних навчальних курсів. З того часу у багатьох учителів і методистів утвердилась думка, що логічно коректним можна вважати тільки аксіоматичний курс геометрії.

1.2 Різні підходи та трактування логічних основ геометрії

Основи математики у вигляді логічно досконалої математичної теорії, що виходила з мінімуму вихідних положень, намагався викласти Евклід ще в III ст. до н.е. Основну свою працю грецькою мовою він називав „τοιχεϊα”, тобто стихії. Латинською мовою її називали ,,Еlementa” (елементи), російською - „Начала”, тобто початки або основи. Цей твір Евкліда - ранній попередник сучасного способу аксіоматичної побудови математичних наук.

Праця Евкліда складається з 13 книг. Планіметричний матеріал викладено у перших шести книгах, а стереометричний у трьох останніх. У 7-9 книгах подаються елементи теорії чисел, а в 10 - геометрична теорія ірраціональних чисел. Кожна книга починається з означень тих термінів, які зустрічаються в ній, а потім ідуть твердження (теореми і задачі). В першій книзі перераховуються також аксіоми і постулати.

Аксіоматична будова геометрії в «Началах» Евкліда була недосконалою, зокрема:

**·** не виокремлювалися первісні поняття, а формулювалися означення для всіх понять;

**·** введення термінів відбувалося без необхідної чіткості та однозначності;

**·** в міркуваннях використовувалися посилання на геометричну очевидність та інтуїцію;

**·** не існувало точного опису структури доведення.

До XX століття у всіх країнах геометрію викладали за Евклідом. Це було або майже точне наслідування «Начал» (як в Англії), або вільне трактування, подібно до робіт Лежандра (у Франції). Вітчизняні підручники і посібники з геометрії в різні часи будувалися за напрямами В, С, D - від досвідно-дедуктивного до інтуїтивно-експериментального .

До середини XX століття усі вітчизняні школи дотримувалися рівня ВВ, тобто розповідали учням про можливість аксіоматичної побудови геометрії, але формулювали тільки частину аксіом; важливіші і доступніші для учнів теореми доводили, але й використовували знання, отримані з досвіду. Згодом академіки А.М.Колмогоров [4] і О.В.Погорєлов [6] запропонували для загальноосвітніх шкіл курси геометрії, орієнтовані на рівень ВА - відразу формулювали всі аксіоми, потрібні для викладу перших розділів.

Мрією академіка А.М.Колмогорова було привести логічні основи сучасної математики до такого стану, щоб їх можна було викладати в школі підліткам. Навіть у навчальному посібнику для учнів він умістив пункт «Про логічну будову геометрії» [4, с. 372], який починався такими словами.

«Логічно строгий» курс геометрії будують так:

I. Перераховують основні геометричні поняття, які вводяться без означень.

II. За їх допомогою означаються усі інші геометричні поняття.

III. Формулюються аксіоми.

IV. На основі аксіом і означень доводять усі інші геометричні твердження».

А.М.Колмогоров, говорячи про логічні основи шкільного курсу геометрії, основну увагу звертав на поняття і твердження.

О.В.Погорєлов найціннішим у геометрії вважав доведення: «Головне завдання викладання геометрії в школі - навчити учня логічно міркувати, аргументувати свої твердження, доводити. Дуже небагато з тих, хто закінчить школу, стане математиками, а тим більше геометрами. Будуть і такі, які в своїй практичній діяльності жодного разу не скористаються теоремою ІІіфагора. Проте навряд чи знайдеться хоча б один, кому б не довелося міркувати, аналізувати, доводити».[8] Поняттям і означенням він не надавав великого значення. Це відмічали навіть його коментатори: «Але означенням в побудові систематичного курсу геометрії відводиться як би другорядна роль. Автор навчального посібника вважає, що нечітке відтворення учнями означення не повинно заважати йому правильно доводити теорему» [8, с. 14]. Так дивилися на шкільну геометрію впродовж двох останніх десятиліть. А оскільки доведення становлять тільки незначну частину логіки, тоді питання про логічну основу шкільної геометрії піднімалось і обговорювалось рідко.

Багаторічна практика переконливо показала, що побудовані на аксіоматичній основі підручники геометрії для основної школи не тільки надто важкі, а й надто нецікаві. Знання про можливість побудови геометрії на аксіоматичній основі потрібне філософам і математикам. Саме розуміння цього дозволило вченим відкрити неевклідові геометрії, істотно змінити погляди на сутність науки. Ніякої іншої ролі в навчанні геометрії аксіоматика не виконує - ні стосовно кращого осмислення означень понять і доведень теорем, ні щодо умінь розв’язувати задачі.

Адаптований для школи аксіоматичний курс геометрії не тільки малозрозумілий через надмірну абстрактність, а й надто бідний змістом. У ньому основна увага звертається на найперші теми, на очевидні твердження, а на вивчення найцікавіших питань (коло Ейлера, трикутники Наполеона, чевіани трикутника, паркети і орнаменти, задачі на розрізання фігур тощо) не вистачає часу. Він виявляється недостатнім для моделювання об’єктів і процесів реального світу. Люди, тварини, рослини, різні будови і механізми - речі неопуклі, а в шкільній геометрії традиційно обмежувалися вивченням тільки опуклих фігур: опуклих кутів, многокутників, многогранників, тіл обертання. В результаті учні часто не знають, скільки сторін має неопуклий чотирикутник, скільки граней - неопукла шестикутна призма тощо.

Все ж, ще й тепер немало учителів і методистів дотримуються традиційної думки про те, що основне в шкільній геометрії - аксіоми і теореми, що аксіоматичний курс геометрії цікавіший від інших, що він - мов цікава гра, збуджує інтерес учнів. Геометрію вивчають в школі не тому, що вона - «гра», а тому, що вона потрібна багатьом людям. Потрібна так само, як фізика, хімія, географія, астрономія, біологія та інші навчальні дисципліни. Для майбутніх науковців та інженерів вона потрібна як засіб, «знаряддя, таке саме, як штангель, зубило, ручник, терпуг для слюсаря» (О.М.Крилов), для всіх інших - як чудовий матеріал для розвитку логічного мислення учнів, адже «геометрія - правителька всіх розумових пошуків» (М.В.Ломоносов). А ще вона - великий згусток загальнолюдської культури. «У величезному саду геометрії кожний може підібрати собі букет за смаком» (Д.Гільберт). [7]

Логічні основи - необхідна умова побудови шкільного курсу геометрії, але їх не слід зводити до аксіоматичного методу. Бажано так будувати шкільний курс геометрії, щоб усі його поняття, означення, класифікації, твердження та їх доведення, задачі тощо подавати відповідно до вимог логіки.

Розглянемо кілька алогізмів, яких слід наполегливо позбавлятися.

1. «Означення. Означення - це твердження, в якому роз’яснюється (через відомі поняття), які саме об’єкти або властивості підпадають під дану назву».

Таке означення не є коректним хоча б тому, що означення - це речення, але не твердження. (Учням краще пояснити так. Означення - це речення, в якому за допомогою вже відомих понять і їх властивостей розкривається зміст нового поняття).

2. Поділ трикутників на різносторонні, рівнобедрені і рівносторонні з логічного погляду неправильний, бо кожний рівносторонній трикутник є водночас і рівнобедреним. (Правильною є інша класифікація. Усі трикутники поділяються на два види: різносторонні і рівнобедрені, а рівнобедрені - на рівносторонні і не рівносторонні).

. Неправильно ні з погляду математики, ні з погляду логіки ототожнювати відстань від точки до променя (чи відрізка) з відстанню від точки до прямої, якій належать промінь чи відрізок. (Таке розуміння відстані приводить до неправильних формулювань теорем і логічно неправильних доведень).

Тепер школи поступово переходять на нові підручники геометрії. Використовуються підручники таких авторських колективів.

**·** Бурда М.І., Тарасенкова Н.А.;

**·** Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владимирова Н.Г.;

**·** Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.;

**·** Апостолова Г. В.;

**·** Єршова А.П., Голобородько В.В. та ін.;

**·** Істер О.С.

Вони різні, але логічні основи усіх істотно відрізняються від логічних основ підручників О.В.Погорєлова і А.М. Колмогорова та ін. Жоден з цих підручників не будується на аксіоматичній основі. Це добре, оскільки практика останніх десятиліть переконливо показала, що побудовані на аксіоматичній основі підручники геометрії для основної школи не тільки надто важкі, а й надто нецікаві.

РОЗДІЛ II . ОГЛЯД РІЗНИХ ПІДХОДІВ ДО АКСІОМАТИЧНОЇ ПОБУДОВИ ШКІЛЬНОГО КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ

2.1 Короткий історичний огляд розвитку аксіоматичного методу

Починаючи з III ст. до н.е. протягом двох тисяч років зразком викладу геометричного матеріалу були «Початки» Евкліда, зміст яких брався за основу написання підручників з геометрії для різних навчальних закладів.

Перший у Росії підручник під назвою «Генеральна геометрія» був виданий у 1765 р. Н.Г. Курчановим, учнем Л.Ф. Магницького. Цей підручник складався з трьох розділів: лонгіметрія, в якому розглядались суміжні та вертикальні кути, ознаки паралельності прямих та ін.; планіметрії і стереометрії.

Дещо пізніше російські педагоги Е.М. Головін, С.Е. Гур'єв, Т.Д. Осиповський, Ф.І. Буссе видали ряд підручників з геометрії для гімназій, реальних училищ та інших середніх навчальних закладів. Ці підручники вже складались з двох традиційних розділів - планіметрії і стереометрії. Особливо популярним був підручник «Елементарна геометрія в обсязі гімназичного курсу» професора Московського університету А.Ю.Давидова, цей підручник багаторазово видавався з 1864 р. по 1922 р.

Заслуженою популярністю користувався підручник з геометрії для середньої школи А.П. Кисельова, виданий вперше в кінці XIX ст. Тривалий час в школах України геометрію вивчали за цим підручником. У вступі до планіметрії були сформульовані основні властивості площини і прямої. Тут же наведені три аксіоми з «Початків» Евкліда. Доведення планіметричних тверджень проводилось далі без посилання на ці аксіоми (в основному використовувався метод накладання). У стереометрії А.П. Кисельова сформульовані три властивості площини, названі теж аксіомами, які частково використовувались при доведенні теорем. Про яку-небудь систему аксіом, аксіоматичний методу підручнику А.П. Кисельова не йдеться.

Суть аксіоматичного методу побудови геометрії, короткий зміст «Початків» Евкліда і систему аксіом Д.Гільберта викладено в додатках «Про аксіоми геометрії» професора Н.Д. Глаголєва до стереометрії А.П. Кисельова. У 70-ті роки минулого століття в школах України (як і в інших республіках СРСР) планіметрія вивчалась за навчальним посібником, створеним авторським колективом під керівництвом академіка А.М. Колмогорова (А.М. Колмогоров, О.Ф. Семенович, Р.С. Черкасов. Геометрія: Навчальний посібник для 6-8 класів середньої школи. - К.: Рад. школа, 1973). У першому розділі - «Початкові поняття геометрії» - введені основні (без означення) поняття стереометрії: точка, пряма, площина, відстань між двома точками. Потім сформульовані три основні властивості відстані, на основі яких доведено твердження про те, що для будь-яких трьох точок А, В і С відстань АС більша або дорівнює різниці відстаней АВ і ВС. У цьому ж пункті введене поняття аксіоми, сформульована аксіома прямої, на основі якої доведена теорема про те, що дві прямі можуть мати не більше однієї спільної точки. Далі формулюються твердження, одні з яких не доводяться, інші доводяться, але термін «аксіома» не вживається. Отже, системи аксіом, на якій би будувалась планіметрія, у ході викладення матеріалу не сформульовано, аксіоматичний метод не реалізовано.

У додатках «Про логічну побудову геометрії» з'ясовано суть логічної будови геометрії та запропонована одна із можливих систем аксіом, відповідна системі викладу геометричного матеріалу в даному посібнику. Ця система аксіом складається з дванадцяти аксіом, поділених на п'ять груп:

) аксіоми належності (3);

) аксіоми відстані (3);

) аксіоми порядку (4);

) аксіома рухомості (1);

) аксіома паралельних (1).

У 80-ті роки минулого століття з'явилося декілька спроб побудувати шкільний курс геометрії на аксіоматичній основі. Це навчальний посібник О.В. Погорєлова, авторського колективу, очолюваного О.Д. Александровим, посібник Л.С. Атанасяна та ін.

Відомо, що за основу планіметрії можна взяти різні системи аксіом, тому і побудова планіметрії може бути здійснене різними шляхами. Але, незважаючи на різні підходи до побудови планіметрії, в ній вивчають одні й ті ж геометричні фігури і дістають одні й ті ж їх властивості, виражені в аксіомах і теоремах: це теорема Шфагора, теореми про суму кутів трикутника, про площу трикутників і многокутників, ознаки рівності трикутників, операції над векторами і т.д.

2.2 Система аксіом О.Д. Александрова

Спроба аксіоматичної побудови курсу геометрії для учнів шкіл і класів з поглибленим вивченням математики здійснена авторським колективом під керівництвом академіка О.Д. Александрова у навчальних посібниках з геометрії для 8-9 і 10-11 класів. Формулювання аксіом у цих посібниках передбачає, що учням відома арифметика дійсних чисел і поняття додатної величини.

Основні об'єкти планіметрії: точка і пряма.

Основні відношення: належність (для точки і прямої), лежати між (для трьох точок, які лежать на одній прямій).

Система аксіом розбита на п’ять груп.

I група: Аксіоми належності

1.1. Через кожні дві точки проходить пряма, і притому тільки одна.

1.2. На кожній прямій існує принаймні дві точки. Існують принаймні три точки, які не лежать на одній прямій.

II група: Аксіоми порядку

.1. Із кожних трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

2.2. Кожна пряма розбиває площину на дві півплощини. Перед формулюванням аксіоми 2.2 вводиться поняття відрізка і півплощини, а після неї - поняття променя.

III група. Аксіоми відстані

3.1. Кожним двом точкам ставиться у відповідність додатна величина, яка називається відстанню між цими точками.

Вводиться позначення відстані між точками А і В: |АВ| або |ВА|

3.2. Для будь-якої відстані г на заданому промені з початком О існує точка А, для якої |ОА| = г.

Цю аксіому ще називають аксіомою відкладання відрізка.

3.3. Якщо точка В лежить між точками А і С, то |АВ| + |ВС| = |АС| (аксіома адитивності довжини відрізка).

3.4. Для будь-яких трьох точок А, В, С має місце нерівність |АВ| + |ВС| > |АС|.

Далі вводиться поняття руху як відображення, при якому зберігаються відстані.

IV група. Аксіоми рухомості

.1. Нехай промінь 1 з початком у точці О лежить на межі півплощини а, а промінь 1' з початком у точці О' лежить на межі півплощини а'. Тоді існує такий рух, який переводить точку О в. (У, промінь / в Р і швплощину а в а'.

V група. Аксіоми паралельності Евкліда

.1. Для кожної прямої а і кожної точки А, яка не лежить на прямій а, існує не більше однієї прямої, що проходить через точку А і не перетинає прямої а.

Переходячи до стереометрії, зазначимо, що поняття площини в даній системі аксіом не є неозначуваним.

Означення. Площиною називається фігура, на якій виконується планіметрія і для якої справджуються аксіоми стереометрії.

Аксіоми стереометрії

Аксіома 1 (аксіома площини). У просторі існують площини. Через кожні три точки простору проходить площина. З цієї аксіоми випливає, що в просторі існує більше однієї площини.

Аксіома 2 (аксіома перетину площин). Якщо дві площини мають спільну точку, то їх перетином є їх спільна пряма.

Аксіома 3 (аксіома належності прямої площині). Якщо пряма проходить через дві точки даної площини, то вона лежить у цій площині.

Перед формулюванням наступної аксіоми вводиться поняття півплощини.

Аксіома 4 (аксіома розбиття простору площиною). Кожна площина розбиває простір на два півпростори.

Аксіома 5 (аксіома відстані). Відстань між будь-якими двома точками простору не залежить від того, на якій площині, що містить точки, вона виміряна.

Після того як вибрано одиничний відрізок, довжина кожного відрізка виражається додатним числом.

Аксіома відстані надає можливість порівнювати фігури на різних площинах, зокрема застосувавши теореми про рівність і подібність трикутників, розміщених у різних площинах.

Зазначимо, що знову є лише вказівка на те, що планіметрію можна побудувати аксіоматичне на основі перелічених аксіом, але фактично це не реалізовано.

2.3 Система аксіом О.В. Погорєлова

У 1982-1983 навчальному році у школах України (та інших республік СРСР), починаючи з 6 класу, геометрію стали вивчати за навчальним посібником академіка О.В. Погорєлова. Основний зміст цього посібника був опублікований у 1972 році в книзі «Елементарная геометрия» [5], яка подавалась на конкурс шкільного підручника з геометрії. В результаті експерименту з викладання геометрії за посібником О.В. Погорєлова у школах Харківської області, міст Києва і Севастополя цей посібник удосконалювався (1977-1982 рр.), і варіант «Геометрія 6-10» з 1982 р. Міністерством освіти СРСР і Міністерством освіти УРСР рекомендований у практику викладання геометрії в середній школі як основний навчальний посібник.

Основне завдання у викладанні геометрії автор нового посібника визначив так: «Пропонуючи цей курс, ми виходили з того, що головне завдання викладання геометрії в школі - навчити учнів логічно міркувати, аргументувати свої твердження, доводити. Дуже небагато з тих, що закінчать школу, будуть математиками, тим більше геометрами. Будуть і такі, що у своїй практичній діяльності жодного разу не використають теорему Шфагора. Проте навряд чи знайдеться хоч би один, якому не доведеться міркувати, аналізувати, доводити».

Можна виділити такі науково-педагогічні особливості цього посібника:

1) традиційний зміст і аксіоматична побудова;

2) економний виклад матеріалу і організуюча роль запитань для повторення;

3) єдність теорії і практики.

Відносно традиційного змісту О.В. Погорєлов зауважив: «Увесь багатовіковий досвід викладання елементарної геометрії з часів Евкліда доводить раціональність традиційної системи. Удосконалення її, пов'язане із загальним розвитком науки, не повинне стосуватися її розумних і глибоко продуманих основ» [5, с. 7].

Дедуктивна побудова геометрії визначається її аксіоматикою. Взагалі не слід змішувати аксіоматичну побудову шкільного курсу геометрії з аксіоматичною побудовою геометрії як науки. Спроби авторів ототожнювати їх при написанні шкільних підручників приводили до невдач. Тому досить популярна система аксіом Гільберта для побудови шкільної геометрії не підходить. Для дедуктивної побудови шкільного курсу геометрії необхідно мати просту, природну, зрозумілу для учнів систему аксіом. Цим вимогам найбільше відповідає система аксіом О.В. Погорєлова. В його посібнику здійснено систематизований виклад геометричного матеріалу на базі оригінальної і економної системи аксіом. При цьому аксіоматичний виклад ведеться від початку курсу. Автор вважає, що з педагогічної точки зору необхідно як можна раніше виховати в учнів мотивовану потребу аргументувати свої міркування, доводити нові твердження.

Курс геометрії в підручнику О.В. Погорєлова «Геометрія 7-11» [7] побудовано строго дедуктивно: усі аксіоми у вигляді основних властивостей найпростіших геометричних фігур сформульовані в першому параграфі. По суті, у цьому параграфі закладені основи курсу геометрії.

Основними поняттями є точка, пряма, площина, належати для точок і прямих, лежати між для точок на прямій міра (довжина відрізка, градусна міра кута).

Формулювання аксіом планіметрії і їх кількість у різних виданнях навчального посібника дещо змінювались, уточнювались. Наведемо їх формулювання за підручником [7]. Система аксіом (за цим підручником) складається з дев'яти аксіом планіметрії і трьох аксіом стереометрії. З методичних міркувань і для зручності викладу матеріалу аксіоми стереометрії сформульовані на початку стереометрії (§ 15). У підручнику [7] аксіоми не розбиті на групи, а мають порядкові номери.

I. Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй.

II. Через будь-які дві точки можна провести пряму і тільки одну

III. З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

IV. Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою.

V. Пряма розбиває площину на дві півплощини.. Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.. На будь-якій півпрямій від її початкової точки можна відкласти відрізок даної довжини, і тільки один.. Від будь-якої півпрямої в дану півплощину можна відкласти кут з даною градусною мірою, меншою за 180°, і тільки один.

IX. Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому в заданому розміщенні відносно даної півпрямої.

X. Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести на площині не більше як одну пряму, паралельну даній.

Аксіоми стереометрії

А1. Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй.

А2. Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.

А3. Якщо дві різні прямі мають спільну точку, то через них можна провести площину, і до того ж тільки одну.

Звертаємо увагу на те, що у формулюванні аксіом І-ІХ відсутнє слово площина, оскільки вони формулювались у планіметрії, де всі об'єкти геометрії розміщені в одній площині.

У стереометрії нескінченно багато площин, тому при формулюванні аксіом І-IX в стереометрії необхідно в кожній з них підкреслювати, що названі об'єкти лежать в одній площині.

Наприклад, аксіома IV матиме в просторі таке уточнене формулювання:. Пряма, що належить площині, розбиває цю площину на дві півплощини.

Такі уточнення стосуються і аксіом VII, VIII, IX при їх формулюванні в стереометрії.

У міру потреби перед формулюванням аксіом вводяться означувані поняття: відрізок, промінь (півпряма), кут, розгорнутий кут, трикутник, рівні відрізки, рівні кути, рівні трикутники, паралельні прямі та ін.

Відзначимо деякі особливості формулювання аксіом, означень і доведення теорем.

. У багатьох підручниках з планіметрії для середньої школи період введення системи аксіом розтягувався до закінчення вивчення планіметрії. Пропонувалось спочатку вивчати геометрію на рівні наочних уявлень та інтуїтивно зрозумілих висновків без логічного їх обгрунтування, накопичуючи певні суттєві геометричні відомості, а після завершення вивчення планіметрії перейти до аксіоматичного викладу матеріалу, тобто спочатку основний зміст планіметрії вивчався емпірично. Але при цьому не виконувалось основне завдання - не формувалось наукове, дедуктивне мислення учнів.

На відміну від такого погляду на побудову і вивчення систематичного курсу геометрії, починаючи з планіметрії, у підручнику О.В. Погорєлова враховуються вікові можливості учнів 7-9 класів і використання наочних та інтуїтивних прийомів поєднується зі строго науковим, дедуктивним викладом (і вивченням) геометричного матеріалу уже з перших уроків геометрії в 7 класі. При цьому ставиться завдання не заучування аксіоматичних доведень, а поступового оволодіння ними; а також завдання доведення всіх тверджень, які не входять у число основних властивостей найпростіших геометричних фігур. Саме з урахуванням цього спочатку не вживається поняття аксіоми, воно замінене більш зрозумілим поняттям «основні властивості», які емпірично відомі учням з програми математики 1-6 класів. Лише в кінці § 1 (п. 13) читаємо: «Твердження, які міcтять формулювання основних властивостей найпростіших фігур, не доводяться і називаються аксіомами. Слово «аксіома» походить від грецького слова «аксіом» і означає «твердження, що не викликає сумнівів».

Під час доведення теорем дозволяється користуватися основними властивостями найпростіших фігур, тобто аксіомами, а також уже доведеними властивостями, тобто теоремами. Ніякими іншими властивостями фігур, навіть якщо вони нам видаються очевидними, користуватись не можна.

При доведенні теорем можна користуватися рисунком, як геометричним записом того, що виражається словами. Під час міркувань не дозволяється використовувати властивості фігур, які видно з рисунка, якщо не можна обґрунтувати їх, спираючись на аксіоми і теореми, доведені раніше».

. Вимірювання геометричних величин займає значну частину шкільного курсу геометрії, зокрема при розв'язуванні задач. У той же час введення понять вимірювання відрізків і кутів є одним із найскладніших для учнів 7 класу. Ці поняття можна ввести по-різному, Один із способів введення поняття величини відрізка і кута, який використовується в інших підручниках з геометрії, базується на понятті накладання, точніше, переміщення, бо накладання можна виконати тільки уявно. При заміні поняття «довжина» поняттям «відстань» треба формулювати аксіоми відстані.

Взагалі питання вимірювання довжини відрізка прямої еквівалентне питанню побудови теорії дійсних чисел, оскільки можна встановити взаємно однозначну відповідність між точками прямої і множиною дійсних чисел. Але цей шлях для учнів 7-9 класів також не підходить.

Тому О.В. Погорєлов у своєму підручнику, враховуючи вікові та пізнавальні можливості учнів, починаючи з 7 класу обходить теоретичні питання вимірювання довжин відрізків та величин кутів, замінивши їх достатньою мірою адекватними моделями - відповідно масштабною лінійкою і транспортиром, що не знижує наукового рівня розуміння основних властивостей вимірювання відрізків і кутів. Тоді аксіоми III і V стають цілком доступними для учнів 7 класу.

. Досить важливим у геометрії є поняття рівності фігур. У багатьох шкільних підручниках геометрії поняття рівності вводиться на основі властивостей руху, при цьому формулюються властивості (аксіоми) руху, які важко сприймаються на рівні 7 класу.

О.В. Погорєлов у своєму підручнику поняття рівності відрізків і кутів вводить на основі аксіом III і V вимірювання (п. 9 § 1):

«Два відрізки називаються рівними, якщо вони мають однакову довжину.

Два кути називаються рівними, якщо вони мають однакову кутову міру в градусах.

Трикутники називаються рівними, якщо в них відповідні сторони рівні і відповідні кути рівні. При цьому відповідні сторони мають лежати проти відповідних кутів». В означенні рівності трикутників особливо підкреслюється, що рівними мають бути відповідні сторони і відповідні кути, чого раніше в подібних означеннях не було.

Вводячи аксіому VIII, О.В. Погорєлов виключив використання досить складних за змістом і абстрактних аксіом руху і забезпечив можливість аксіоматичного викладу матеріалу про ознаки рівності трикутників.

Аксіома VIII про існування рівних трикутників дуже проста за формулюванням, доступна учням 7 класу і конструктивна: кожний учень може переконатись в існуванні трикутника, рівного даному, за допомогою побудови.

Пізніше, у 8 класі, після вивчення властивостей рухів поняття рівності фігур вводиться узагальнено: дві фігури називаються рівними, якщо вони переводяться одна в іншу певним рухом (§ 9).

Геометрична система будується не тільки на аксіомах (основних властивостях) і теоремах, а й на означеннях.

У підручнику О.В. Погорєлова даються означення всіх понять, які використовуються при побудові геометрії. Більшість означень понять дано так, що в них правильно і послідовно закріплюються результати діяльності мислення. Використовуються в основному означення двох видів - описові (дескриптивні) і конструктивні. Прикладами конструктивних означень є означення трикутника, кола тощо. Наприклад, трикутник визначається не як частина площини, а як фігура, утворена трьома точками, що не лежать на одній прямій, і трьома відрізками, які попарно сполучають ці точки. Взагалі, до вивчення § 13 «Площі фігур» та § 20 «Об'єми тіл» у підручнику О.В. Погорєлова планіметричні, а потім і стереометричні фігури розглядаються як каркасні, що більше відповідає фактичному виконанню рисунків або конструкцій (моделей) цих фігур.

4. У підручнику О.В. Погорєлова немає прийнятої в інших навчальних посібниках символіки. Надмірне захоплення символікою в 7 класі лише гальмує розвиток логічного мислення учнів, оскільки водночас необхідно стежити за логікою міркувань і вникати в зміст застосовуваних символів. Автор дотримується традиційної точки зору на використання символіки: формування понять неможливе без слів, а мислення в поняттях неможливе без усного мовлення. Експериментальні дослідження показали, що учні краще розуміють матеріал без використання спеціальної символіки. Звичайно, вчителеві зручно використовувати більше символіки для скорочених записів на дошці і в зошитах доведення теорем і розв'язання задач. Але затрати часу на засвоєння символіки не компенсуються скороченими записами, основний час уроку треба витрачати на навчання учнів міркувати.

5. Наприкінці кожного параграфа підручника з геометрії є запитання для повторення, за допомогою яких здійснюється контроль знань, умінь, навичок учнів. У цих запитаннях передбачено, що учень має вивчити напам'ять, що повинен уміти довести, а що просто пояснити на прикладах. На оцінку знань учнів істотно впливає і вміння розв'язувати задачі з підручника.

Отже, як видно з короткого огляду особливостей викладу матеріалу геометрії, запропонована система аксіом є науковою основою підручника О.В. Погорєлова, вона доступна учням. Всі планіметричні аксіоми розміщені на початку курсу геометрії, вони дають можливість побудувати курс геометрії дедуктивно, на високому науковому рівні. Звертаємо увагу на те, що ця система аксіом є науковою основою для засвоєння найважливіших понять курсу геометрії, таких, як відрізки, кути, рівність відрізків і кутів, рівність трикутників, паралельність прямих, сума кутів трикутника тощо.

Традиційна побудова курсу, в якому основним методом доведення є використання ознак рівності трикутників, приводить до того, що доведення з посиланням на аксіоми триває недовго: досить швидкий перехід до теорем про рівність трикутників дозволяє далі використовувати їх для доведення всіх наступних тверджень і розв'язання задач без прямого посилання на аксіоми.

Зрозуміло, що не треба семикласникам пояснювати суть аксіоматичного методу побудови геометрії. Це, по-перше, не вимагається програмою, по-друге, у процесі вивчення геометрії учні поступово звикатимуть до ідеї її дедуктивної побудови, а закінчивши вивчення планіметрії, дістануть загальне уявлення про геометрію як логічну науку. Таким чином, вибрана О.В. Погорєловим система аксіом шкільного курсу геометрії надала можливість досягти досить високого рівня доведення тверджень, а логічна послідовність викладення матеріалу і знайдені автором нові математичні підходи до викладення важких розділів дозволили значно скоротити зміст і обсяг підручника.

Метрична система аксіом О.В. Погорєлова дозволяє уже з 8-го класу ефективно використовувати при доведенні геометричних тверджень координатний метод і цим самим зменшити обсяг матеріалу, а також створити умови для здійснення внутрішньо предметних зв'язків геометрії і алгебри.

Традиційний зміст і аксіоматична побудова геометрії в підручнику «Геометрія 7-10» О.В. Погорєлова, його внутрішньо предметні зв'язки і орієнтація на учнів - усе це має єдину мету: розвивати в учнів логічне мислення.

2.4 Система аксіом Л.С. Атанасяна

Один із варіантів аксіоматики шкільної геометрії для загальноосвітніх середніх шкіл запропонований авторським колективом під керівництвом професора Л.С. Атанасяна [10].

Основними об’єктами (не означуваними поняттями) в ній є точка, пряма і площина, основними відношеннями між основними об'єктами - належність, лежати між, накладання (рівність), міра відрізка. Крім того, використовуються загальноматематичні поняття множина, число та ін.

У додатках до підручника з геометрії для 7-9 класів сформульовано 16 аксіом планіметрії:

1. Кожній прямій належать принаймні дві точки.

2. Існує принаймні три точки, які не лежать на одній прямій.

. Через будь-які дві точки проходить пряма, і притому тільки одна.

. Із трьох точок прямої одна і тільки одна лежить між двома іншими.

5. Кожна точка О прямої розділяє її на дві частини (два промені) так, що будь-які дві точки одного променя лежать по один бік від точки О, а будь-які дві точки різних променів лежать по різні боки від точки О.

6. Кожна пряма α розділяє площину на дві частини (дві півплощини) так, що будь-які дві точки однієї і тієї ж півплощини лежать по один бік від прямої α , а будь-які дві точки різних півплощин лежать по різні боки від прямої α.

7. Якщо при накладанні збігаються кінці двох відрізків, то збігаються і самі відрізки.

8. На будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок, рівний даному, і притому тільки один.

9. Від будь-якого променя в даній півплощині можна відкласти кут, рівний даному нерозгорнутому куту, і притому тільки один.

10. Будь-який кут НН можна сумістити накладанням з рівним йому кутом η1Ь1 двома способами: 1) так, що промінь Н збігається з променем Лх, а промінь й - з променем А; 2) так, що промінь Н збігається з променем А^, а промінь Н - з променем НЛ.

10. Будь-яка фігура рівна сама собі.

11. Якщо фігура Ф рівна фігурі Ф^ ,то фігура Ф1 рівна фігурі Ф.

12. Якщо Ф1 = Ф2 і Ф2 = Ф3, то ФХ = ФД.

14.При вибраній одиниці вимірювання відрізків довжина кожного відрізка виражається додатним числом.

15.При вибраній одиниці вимірювання відрізків для будь-якого додатного числа існує відрізок, довжина якого виражається цим числом.

16. Через точку, яка не лежить на даній прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.

У підручнику з геометрії для 10-11 класів цих же авторів [7] уже у вступі сформульовані три аксіоми стереометрії.

) Через будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, проходить площина, і притому тільки одна.

) Якщо дві точки прямої лежать у площині, то всі точки прямої лежать у цій площині.

) Якщо дві площини мають спільну точку, то вони мають спільну пряму, на якій лежать всі спільні точки цих площин.

Далі доводяться два наслідки з перелічених аксіом:

1. Через пряму і точку, яка їй не належить, проходить площина, і притому тільки одна.

2. Через дві прямі, що перетинаються, проходить площина, і притому тільки одна.

При введенні нових понять і доведенні теорем використовуються відомі з планіметрії твердження і деякі аксіоми.

Аксіоми першої групи характеризують взаємне розміщення точок, прямих і площин.

1. На кожній прямій і в кожній площині є точки.

2. Існують принаймні три точки, які не лежать на одній прямій, і принаймні чотири точки, які не лежать на одній площині.

3. Через будь-які дві точки проходить пряма, і притому тільки одна.

4. Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, проходить площина, і притому тільки одна.

5. Якщо дві точки прямої лежать у площині, то і всі точки прямої лежать у цій площині.

6. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони мають спільну пряму, на якій лежать всі спільні точки цих площин.

7. З трьох точок прямої одна і тільки одна лежить між двома іншими.

8. Кожна точка О прямої розділяє її на дві частини - два промені - так, що будь-які дві точки одного і того ж променя лежать по один бік від точки О, а будь-які дві точки різних променів лежать по різні боки від точки

9. Кожна пряма а, що лежить у площині, розділяє цю площину на дві частини (дві півплощини) так, що будь-які дві точки однієї і тієї ж півплощини лежать по один бік прямої а, а будь-які дві точки різних півплощин лежать по різні боки від прямої а.

10. Кожна площина а розділяє простір на дві частини (два півпростори) так, що будь-які дві точки одного і того ж півпростору лежать по один бік від площини а, а будь-які дві точки різних півпросторів лежать по різні боки від площини а.

Друга група аксіом належить до понять накладання і рівності фігур.

Перед формулюванням аксіом цієї групи вводиться відношення накладання як відображення простору на себе, при якому виконуються перелічені нижче аксіоми 11-17. Крім того, використовується поняття рівності фігур, яке визначається так.

Нехай Ф і Ф1 - дві фігури; якщо існує накладання, при якому фігура Ф відображається на фігуру Ф^ то говорять, що фігуру Ф можна сумістити накладанням з фігурою ФX або що фігура Ф рівна фігурі ФГ .

Третя група аксіом пов'язана з вимірюванням відрізків: це аксіоми 18, 19, вони мають той самий зміст, що і аксіоми 14-15 у планіметрії.

Четверта група - це аксіома паралельності.

. У будь-якій площині через точку, що не лежить на даній прямій цієї площини, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.

РОЗДІЛ III. АКСІОМАТИКА ШКІЛЬНОГО КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ ЗА ПІДРУЧНИКОМ БУРДА М.І., ТАРАСЕНКОВА Н.А. ГЕОМЕТРІЯ

3.1 Загальна характеристика підручника геометрії (Бурда М.І., Тарасенкова Н.А. Геометрія)

Підручник з геометрії для 7 класу Бурда М.І., Тарасенкова Н.А. побудовано відповідно до чинної Програми з математики 5 - 12 класів.

Навчальний матеріал спирається на наочність та геометричну інтуїцію учнів, на їхній життєвий досвід, робить його доступним. Вивчення геометричного факту, як правило розпочинається зі звернення до успіху учня «Ви вже знаєте, що…» з практичних дій або з аналізу відповідного прикладу, моделі чи конфігурації на малюнку. Це дає змогу учням з'ясувати істотні ознаки, властивості геометричної фігури, і на основі цього самостійно сформулювати відповідне твердження. Самостійно оволодіти навчальним матеріалом допоможе підкріплення його малюнками, які виконують не лише ілюстративну, а й евристичну роль - на малюнках кольором виділяються дані і шукані величини, допоміжні побудови тощо.

Зміст підручника спрямований на творчий розвиток учня. Іноді вважають що розвивальний ефект відбувається лише на основі вироблення вмінь доводити властивості геометричних фігур, застосовувати методи геометрії розуміння аксіоматичної побудови курсу, суті абстрактних геометричних конструкцій. Усе це так. Але, враховуючи значення геометрії у діяльності людини, сьогодні і в історичному контексті (започатковувалися і розвивалися інші науки), автори поряд з питаннями, пов’язаними з логічною побудовою курсу, якомога швидше використовували образно-чуттєвий, естетичний,художньо-графічний та емоційно-ціннісний потенціал геометрії.

Підручник добре ілюстрований. Кольорові фотографії та ілюстрації несуть ретельно продумане дидактичне навантаження.

В основному тексті кожного параграфа наводиться також типова задача та її розв’язання. Спосіб розв’язання такої задачі використовується в подальшому.

Тобто геометрична підготовка учня обов’язково включає діяльнісний компонент - де і як застосовувати набуті знання. Важливою особливістю підручника є систематизація геометричного матеріалу (таблиці, схеми, задачі-таблиці, класифікації). З одного боку це покращує застосування матеріалу до розв’язування задач, а з другого посилює зорове сприймання його побачив і запам’ятав.

Підручник розрахований на учнів з різними навчальними досягненнями. Для тих хто цікавиться геометрією, бажає поглибити свої знання, призначена рубрика «Дізнайтесь більше». Матеріал цієї рубрики досить різноманітний, цікавий та корисний для учнів. Школярі отримують можливість ознайомитися не лише з історичними відомостями, а й розширити та поглибити свої знання стосовно основного навчального матеріалу.

Підручником забезпечується організація самостійної роботи учнів. Цьому сприяють, крім вказівок і порад, контрольні запитання (після кожного параграфа) і запитання узагальнюючого характеру та тестові запитання( після кожного розділу).

Особливість їх у тому, що на кожне запитання у відповідному параграфі є точна відповідь, а всі запитання охоплюють увесь основний зміст підручника. Відповідаючи на запитання і виконуючи тести, учень переосмислює, узагальнює і систематизує вивчені відомості, приводить у систему отримані знання і навички, привчається самостійно працювати з підручником.

Тестові запитання чотирьох рівнів складності. Для їх виконання потрібно 15 - 20 хвилин. До кожного завдання дано чотири варіанти відповідей. Одна з яких правильна.

Підручник містить достатню кількість задач для різних видів класної та позакласної роботи. Задачі розраховані на учнів з різними навчальними досягненнями, тому мають чотири рівні складності - початковий, середній, достатній та високий.

Зміст навчального матеріалу відповідає вимогам науковості та доступності, особистісної зорієнтованості, опори на попередній досвід учнів.

Даючи на контрольні запитання і виконуючи тести, треба переосмислити, узагальнити й систематизувати відомості, вивчені у розділі, привести у систему отримані навички й уміння. Навчальні тексти написані так. щоб залучити учнів до співпраці. Тексти позбавлені надмірної повчальності, а сповнені повагою до школяра, який долучається до нелегкої справи - пізнання нового, невідомого, не завжди простого. Поради щодо того, як діяти учню у тій чи іншій навчальній ситуації, сформульовані у підручнику у вигляді правил. Теоремам та їх доведенням приділяється особлива увага. Це дозволятиме учню точніше зрозуміти суть її умови і вимоги. Доведення здебільшого є лаконічним, щоб учень мав змогу не заплутатись у багатослівних міркуваннях. В основному тексті кожного параграфа наводиться типова задача та її розв'язання. Підручник добре ілюстрований. Кольорові фотографії та ілюстрації несуть ретельно продумане дидактичне навантаження. Зокрема вони слугують створенню випереджального уявлення про суть змісту нового розділу, параграфа, полегшенню сприйняття і розуміння учнями нового навчального матеріалу і змісту задач.

3.2 Аксіоматика за підручником Бурда М.І., Тарасенкова Н.А. Геометрія

Розглянемо як в підручнику Бурда М.І., Тарасенкова Н.А. автори подають аксіоми.

Перша аксіома: Існують точки, що лежать на прямій, і точки, що їй не належать.

Автори дану аксіому пояснюють так: «Якщо на аркуш паперу натиснути добре загостреним олівцем, то залишиться слід, який дає уявлення про точку (мал. 1). Прямі проводять за допомогою лінійки (мал.2). На малюнку звичайно зображають лише частину прямої, а всю пряму уявляють необмеженою, продовженою в обидва боки.

Точки позначають великими латинськими буквами A, B, C, D,…, а прямі - малими латинськими буквами a, b, c, d,…

На мал. 2 ви бачите пряму а і точки A, B, C, D. Точки А і В лежать на прямій а, точки C і D не лежать на цій прямій. Можна також сказати , що пряма а проходить через точки А і В, але не проходить через точки C і D.» [1, 9].





Мал. 1 Мал. 2 Мал. 3

Наступна аксіома, яку автори пропонують для вивчення є властивість прямої:

Друга аксіома: Через будь-які дві точки можна провести пряму і тільки одну.

Розглянемо, які пояснення надають автори до цієї аксіоми. «Завдяки цій властивості пряму можна позначити двома її точками, наприклад пряма АВ на малюнку 3. Якщо дві прямі мають спільну точку, то говорять, що вони перетинаються в цій точці. Прямі с і d перетинаються в точці Р (мал. 4).» [1, 10].



Мал. 4

Третя аксіома: З трьох будь - яких точок прямої одна і тільки одна точка лежить між двома іншими.

Цю аксіому автори підручника подають, як властивість розміщення точок на прямій.

« Точки А, В, С прямої лежать з одного боку від точки X (мал. 5). Це означає, що точка X не лежить між будь - якими двома з них.» [1, 10].



Мал. 5

Ось ми розглянули три аксіоми. Перейдемо до наступних аксіом - четвертої та п’ятої, що вивчається у § 2 Відрізки та їх вимірювання. Спочатку автори формулюють означення «відрізок», а також, які відрізки називаються рівними. Після цього вони формулюють наступні аксіоми, які вони подають, як властивості вимірювання відрізків.

Четверта аксіома: Довжина кожного відрізка більша за нуль.

П’ята аксіома: Довжина кожного відрізка дорівнює сумі довжин відрізків, на які він розбивається будь - якою його точкою.

Відразу сформулюємо наступну аксіому - властивість відкладання відрізків.

Шоста аксіома: На будь - якому промені від його початку можна відкласти тільки один відрізок даної довжини.

Перейдемо до § 3 Кути та їх вимірювання. На початку автори формулюють означення «кут», «сторона кута» та «вершина кута».

Сьома аксіома: Градусна міра кожного кута більша за нуль.

Восьма аксіома: Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь - яким променем, що проходить між його сторонами.

Дев’ята аксіома: Від променя по один бік від нього можна відкласти тільки один кут даної градусної міри.

Наступну аксіому автори формулюють у §7 Паралельні прямі.

Десята аксіома: Аксіома паралельних прямих - через точку, яка не лежить на даній прямій можна провести тільки одну пряму паралельну даній.

Наступні три аксіоми планіметрії автори пояснюють у § 12 Рівність геометричних фігур.

Одинадцята аксіома: Будь-яка фігура F накладанням суміщається сама із собою.

Дванадцята аксіома: Якщо фігура F1 накладанням суміщається з фігурою F2, то і фігура F2 накладанням суміщається з фігурою F1.

Тринадцята аксіома: Якщо фігура F1 накладанням суміщається з фігурою F2, а фігура F2 - з фігурою F3, то фігура F1 накладанням суміщається з фігурою F3.

Ми розглянули всі тринадцять аксіом планіметрії, які пропонують для вивчення у 7 класі автори даного підручника. Перейдемо до аксіом стереометрії. Дані аксіоми представлені в підручнику Бурда М.І., Тарасенкова Н.А. Геометрія. Підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів.

Пояснення матеріалу автори починають так: «Ви вже знаєте, що у стереометрії вивчають властивості фігур у просторі. Для цього, як і в планіметрії, використовують аксіоматичний метод.

Спочатку обирають основні поняття - основні фігури та основні відношення. Їх тлумачать через приклади, не даючи означень. Також приймають без доведення вихідні істинні твердження - аксіоми. Всі інші поняття визначають, а всі інші твердження доводять.

Основними фігурами у просторі є точка, пряма і площина, а основними відношеннями - відношення «належати», «лежати між» і «накладання».

Як і в планіметрії, точки позначають великими латинськими буквами А, В, С, .., прямі - малими латинськими буквами а, b, c, … . Площини позначають малими грецькими буквами α (альфа), β (бета), γ (гамма) ... . Введення у просторі нової геометричної фігури - площини - потребує уточнення основних відношень та розширення системи аксіом планіметрії.

Відношення «належати» розглядають не лише для точки і прямої - точка лежить на прямій, але й для точки і площини та прямої і площини - точка (пряма) лежить у площині.

Відношення «лежати між» для трьох будь - яких точок прямої не залежить від її розміщення в просторі, тому це відношення є основним і в стереометрії. Відношення «накладання» у просторі розуміють як суміщення фігур відповідно всіма своїми точками (мал. 6).



Мал. 6

Система аксіом стереометрії складається з двох частин. Перша з них включає всі аксіоми планіметрії. Вони виконуються в кожній площині простору.» [2, 28].

Отже, сформулюємо аксіоми стереометрії за підручником Бурда М.І., Тарасенкова Н.А. Геометрія. Підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів.

Аксіома 1 (належності точки площині). Існують точки, що лежать у даній площині, і точки, що не лежать у ній.

Коротко записуємо: A ∈ α, B ∉ α.

Аксіома 2 (існування і єдиності площини). Через будь - які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну.

Завдяки цій властивості площину можна позначати трьома її точками.



Аксіома 3 (належності прямої площині). Якщо дві точки прямої лежать у площині, то й кожна точка цієї прямої лежить у даній площині.

Записуємо: якщо A ∈ α і B ∈ α, то AB лежить в α.

Аксіома 4 (про перетин площин). Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.

Ми проаналізували систему аксіом за підручниками Бурда М.І., Тарасенкова Н.А. Геометрія. Підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів та Бурда М.І., Тарасенкова Н.А. Геометрія. Підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів і виявили, що вона складається з 13 аксіом планіметрії, які вивчаються у 7 класі та 4 аксіом стереометрії, які вивчаються у 10 класі.

Висновок

Математика, а, отже, й геометрія - дедуктивна наука, яка забезпечує сходження від загального до конкретного. Аксіоматика будь-якої дедуктивної наукової теорії є кістяком її розвитку. Уся ця логічно-дедуктивна аксіоматична система стала підготовчим етапом для побудови однієї з могутніх галузей сучасної математичної науки - алгоритмізації, програмування та обчислюваних засобів без яких немислимий сучасний науково - технічний прогрес.

Аксіоматичний метод (грец. ахіоmа - значиме, прийняте положення) - спосіб побудови теорії, при якому деякі істинні твердження обираються в якості вихідних положень (аксіом), з яких потім логічним шляхом виводяться і доводяться інші істинні твердження (теореми) цієї теорії.

У розвитку аксіоматичного методу розрізняють три етапи. Перший етап характеризується аксіоматичною побудовою силогістики в працях Аристотеля і геометрії в «Началах» Евкліда. Особливістю цього періоду є змістове застосування аксіоматичного методу. На цей час ще не існувало точного опису структури доведення, в міркуваннях використовувалися посилання на геометричну очевидність та інтуїцію, введення термінів відбувалося без необхідної чіткості та однозначності. На другому етапі (кінець XIX початок XX століття) відбувається поступове звільнення від спроб змістової аксіоматичної побудови теорій і перехід до формального розуміння аксіоматичного методу. Перехід від змістового аксіоматичного методу до відкриттям напівформального був підготовлений неевклідової геометрії М. І. Лобачевским (1829). На третьому, сучасному етапі, аксіоматичний метод розуміють як спосіб конструювання формалізованих мовних систем, що веде до чіткого розрізнення штучної формалізованої мови і тієї змістової предметної області, яка в ній відображена.

Більшість учителів і методистів дотримуються традиційної думки про те, що основне в шкільній геометрії - аксіоми і теореми, що аксіоматичний курс геометрії цікавіший від інших, що він - мов цікава гра, збуджує інтерес учнів. Геометрія потрібна так, само, як інші навчальні дисципліни.

математичний аксіоматичний геометрія евклід

Список використаних джерел

1. Бурда М.І., Тарасенкова Н.А. Геометрія. Підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів.

. Бурда М.І., Тарасенкова Н.А. Геометрія. Підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів

. Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. «Геометрия. 7-9 класс.

4. Колмогоров А.Н., Семенович А.Ф., Черкасов Р.С. Геометрия. Учебное пособиедля 6-8 классов средней школы. Изд. 2-е. - М.: Просвещение, 1980.

5. Погорєлов О.В. Геометрія. Планіметрія. Підручник для 7-9 класів. - К.: Школяр, 2005.

. Погорелов А.В. Элементарная геометрия. - М.,1977

. Погорелов А.В. Геометрия. Учебник для 7-11 классов. Изд. 5-е.- М.: Просвещение, 1995. - 383

. Тесленко И.Ф. О преподавании геометрии в средней школе. - М.: Просвещение, 1985.

9. [Електронний ресурс].- Режим доступу: <http://ruh.znaimo.com.ua/index-1232.html>

. Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. «Геометрия. 7-9 класс.

ДОДАТОК 1



Ватиканський манускрипт «Начал», т.2,207v - 207r. Euclid XI prop. 31, 32, 33.



Папірус з Оксиринха Начала Евкліда. Найбільш відомий був знайдений в «місті папірусів» - Оксиринсі в 1896 -1897рр.