МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

Кафедра функционального анализа и алгебры

КУРСОВАЯ РАБОТА

Бинарные отношения в алгебре и геометрии

Работу выполнила

Доронина Л.С.

Краснодар 2014

Содержание

Введение

. «Математическая структура» как одно из ведущих понятий математики

.1 Ведущее понятие как основа для обобщающего повторения школьного курса математики

. Бинарное отношение - основные определения

2.1 Примеры алгебраических бинарных отношений

2.2 Примеры бинарных отношений из курса геометрии

. Обобщающее повторение. Проектная деятельность

Список использованных источников

Введение

Объекты в математике, имеющие определенные свойства, образуют множества с заданными на них операциями. В свою очередь, объекты на множестве связывают некоторые отношения. Данные отношения должны удовлетворять некоторым условиям, являющимися их свойствами.

Отношения по своей природе могут быть весьма разнообразными. Отношения в групповых структурах называются законами композиции, это такое отношение между двумя элементами, которое определяет однозначно третий элемент как функцию двух переменных. Соответствующая структура называется алгебраической структурой. Другой тип структуры определен отношением порядка.

В данной работе будит рассматриваться бинарные отношения на примерах из алгебры и геометрии. Работа состоит из четырех разделов. Первый раздел рассказывает об истории возникновения понятия «математическая структура». Второй раздел описывает основные понятия, которые встречаются в работе. В третьем разделе рассмотрены примеры бинарных отношений из школьного курса алгебры. В четвертом разделе описаны примеры бинарных отношений из школьного курса геометрии.

1. «Математическая структура» как одно из ведущих понятий математики

Одним из подходов к определению математики является системно-структурный подход. Такой подход к объектам исследования связан с переходом от конкретной содержательной аксиоматики к аксиоматике сначала абстрактной, а затем полностью формализованной. В конкретной содержательной аксиоматике, подобной аксиоматике Евклида, исходные понятия и аксиомы в качестве интерпретации имеют единственную систему хотя и идеализированных, но конкретных объектов. В противоположность этому абстрактная аксиоматика допускает бесчисленное множество интерпретаций. Формализованная аксиоматика характеризуется точным заданием правил вывода и вместо содержательных рассуждений использует язык символов и формул. Тогда одни и те же аксиомы могут описывать свойства и отношения самых различных по своему конкретному содержанию объектов.

Эта фундаментальная идея лежит в основе понятия математической структуры. Большой вклад в систематизацию современной математики на базе основных математических структур внесла работа группы французских математиков (А. Вейль, Л. Шварц, К. Шевалье, А. Картан, С. Эйленберг и др.), выступавших под псевдонимом Н. Бурбаки.

В основу своей систематизации Н. Бурбаки положили аксиоматический метод, теорию множеств и понятие математической структуры: «Общей чертой различных понятий, объединенных этим родовым понятием, является то, что они применимы к множеству элементов, природа которых не определена. Чтобы определить структуру, задают одно или несколько отношений, в которых находятся его элементы; затем постулируют, что данное отношение или данные отношения удовлетворяют некоторым условиям (которые перечисляют и которые являются аксиомами рассматриваемой структуры)».

Таким образом, математика изучает только те свойства структур, которые вытекают из принятой системы аксиом. В соответствии с положениями Н. Бурбаки структуры подразделяются на три основных типа: алгебраические, порядковые и топологические.

По мнению ряда крупных математиков, понимание математической структуры Н. Бурбаки слишком узко. Например, в классификации Н. Бурбаки отсутствуют комбинаторные структуры, являющиеся основой конструктивного подхода в математике. По словам Б.В. Гнеденко, «выявилось стремление переместить центр интересов и представлений с понятий математики непрерывного в так называемую конечную математику» [3, с.60].

Также в системе Н. Бурбаки нет места для наглядно-геометрических структур, геометрических образов. Один из членов группы Н. Бурбаки - Ж. Дьедонне - намеренно показал в своей книге «Линейная алгебра и элементарная геометрия» пример изложения курса без единого чертежа. Очевидно, что такой односторонний подход сильно обедняет математическую науку. Так, например, Ю.И. Манин отмечает: «Пространства функций в большинстве случаев бесконечномерны, но возможность направленно воспитать, а затем применить развитую конечномерную (даже трехмерную) интуицию, оказалась исключительно плодотворным открытием» [9].

Следовательно, необходим более широкий подход к пониманию математической структуры. В частности, Л.Д. Кудрявцев предложил включить в понятие математических структур структуры, являющиеся математическими моделями реальных явлений (то есть структуры, образующиеся в теории информации, теории операций, теории случайных процессов и т.д.).

В работе В.А. Тестова предложено толкование математической структуры, на основе социокультурного системного подхода: «под математической структурой можно понимать совокупность устойчивых связей, обеспечивающих целостность математического объекта (математической системы, математической модели). Эта совокупность устойчивых связей математического объекта может быть задана различными способами (аксиоматически, конструктивно, описательно, в виде наглядных образов)» [12, с.25].

Таким образом, математические структуры в понимании Н. Бурбаки, являются лишь частным случаем более широкого толкования этого термина, данного современными авторами. Эти структуры, по выражению французского математика Р. Тома, называются стандартными. Следовательно, к стандартным структурам мы относим алгебраические, порядковые и топологические структуры.

Алгебраические структуры. Примерами таких структур являются группы, кольца, поля, векторные пространства и т.д. Основные характеристики алгебраической структуры: задание на некотором множестве  конечного числа внутренних и внешних операций с соответствующими свойствами - аксиомами алгебраической структуры. В качестве элементов множества  могут выступать объекты любой природы.

Порядковые структуры. Они характеризуются тем, что на множестве объектов задается отношение между двумя элементами, которое мы чаще всего выражаем словами «меньше или равно». Это отношение обладает свойствами рефлексивности, транзитивности и антисимметричности. Изучение общих свойств различных упорядоченных множеств привело к возникновению таких абстрактных порядковых структур как цепи, вполне упорядоченные множества, решетки, булевы алгебры и т.д.

Топологические структуры. Множество  обладает топологической структурой, если каждому его элементу тем или иным способом отнесено семейство подмножеств из , называемых окрестностями этого элемента, причем эти окрестности должны удовлетворять определенным аксиомам (аксиомам топологической структуры). С помощью топологических структур точно определяются такие понятия, как окрестность, предел, непрерывность.

Как показали данные психологических исследований, проведенных школой Ж. Пиаже, психологические математические структуры, образующиеся в сознании ребенка, полностью соответствуют основным типам математических структур. Таким образом, была установлена аналогия между «архитектурой» математики как науки и «архитектурой» развивающегося мышления. Алгебраические структуры, а именно группы, по мнению Ж. Пиаже [10], соответствуют операторным механизмам ума, подчиненным форме обратимости, которую Ж. Пиаже называет инверсией, то есть такой, что произведение операции на обратную есть тождественная операция. Понятие об алгебраических структурах начинает формироваться у ребенка на стадии конкретных операций (с 7 до 11-12 лет). Но к изучению понятия группы можно приступать только на стадии формальных операций не ранее 14-15 лет с накопления и обобщения отдельных свойств алгебраических операций. Понятие же абстрактной группы намного более общее и изучаться должно значительно позднее.

В связи с этим многие математики считают, что задачей математического образования является развитие структур мышления, познание посредством этого развития структур математических, а значит и математики как таковой. Ряд идей о реформе математического образования был высказан еще Ф. Клейном в Эрлангенской (1872 г.), а затем в Меранской программе (1906 г.), в частности, им на первое место были выдвинуты понятие группы и идея преобразований.

1.1 Ведущее понятие как основа для обобщающего повторения школьного курса математики

Выделение ведущего понятия повлечет за собой упорядочение блока учебного материала. Многие факты, которые ранее рассматривались как изолированные, окажутся проявлениями одной общей идеи, а это будет способствовать более глубокому пониманию и усвоению курса. В работах В.А. Далингера говорится, что «ведущими понятиями мы будем считать те, которые удовлетворяют следующим критериям. Они должны:

* формировать у учащихся научное мировоззрение;
* значительно чаще других понятий служить средством изучения различных вопросов математики;
* активно работать на протяжении большого промежутка времени;
* способствовать наиболее полной реализации внутрипредметных связей, а, в конечном счете, и межпредметных;
* иметь прикладную и практическую направленность».

Совершенно очевидно, что идея алгебраической структуры пронизывает весь курс школьной математики: школьники изучают числовые множества и свойства операций на них введенных (сложение, умножение, вычитание, деление), учатся работать с многочленами или векторами (операция сложения), в старших классах знакомятся с геометрическими преобразованиями (операция композиции). На самом деле все подготовлено для того, чтобы выполнить последний шаг - свести в единое целое весь изученный материал и увидеть общую основу. Оказывается, природа элементов изучаемых множеств (чисел, векторов, многочленов, преобразований) не имела значения, важен был набор свойств операции, введенной на данном множестве.

В качестве другой иллюстрации отметим, что понятие порядковой структуры также имеет немаловажное значение для школьного курса математики. Это ведущее понятие связано с одним из самых общих понятий математики - понятием соответствия (а также бинарного отношения). Важнейшие бинарные отношения и соответствия - это эквивалентности, порядки и функциональные соответствия. В геометрии примером отношения эквивалентности является понятие параллельности, определенном на множестве прямых плоскости. Классы этой эквивалентности представляют собой пучки параллельных прямых. На множестве векторов понятие эквивалентности (свободный вектор) иногда подменяется понятием равенства, что может повлечь трудности методического характера при изучении темы. Заметим, что, работая со свободным вектором, школьник имеет дело с представителем класса фактор-множества векторов плоскости. Вне математики отношения эквивалентности также играют очень большую роль: они возникают всякий раз, когда нам приходится проводить классификацию объектов той или иной природы.

С отношением порядка мы встречаемся каждый раз, когда сравниваем действительные числа по величине, людей по старшинству и т.д. В школьном курсе примерами таких отношений служат отношения «делится нацело», «делит», «меньше или равно».

Третий тип бинарных отношений, важность которого для школьного курса математики переоценить трудно, - функциональные отношения.

Приведенные нами примеры показывают необходимость разработки специальной технологии обобщения и систематизации на основе ведущей идеи, позволяющей в определенные моменты изучения курса математики в школе включать в процесс обучения уроки (цикл уроков, факультативный курс) обобщающего повторения.

2. Бинарное отношение - основные определения

Наиболее важными в алгебре и, следовательно, наиболее исследованными являются бинарные операции. Примерами таких операций могут служить сложение и умножение чисел, сложение и умножение матриц, сложение векторов в векторном линейном пространстве.

Если  является подмножеством  можно сказать, что эти два множества находятся в некотором отношении друг с другом. В дальнейшем, мы будем изучать подобные отношения. Но сначала надо уточнить понятие отношения так, чтобы оно могло стать предметом математического исследования.

Прежде всего, договоримся читать запись  словами «а находится в отношении  с », и тогда естественным образом приходим к тому, чтобы рассматриваемое отношение назвать отношением .

Рассмотрим понятие «отношение» в общем случае. Пусть  - некоторое непустое множество. Декартовым квадратом множества  назовем множество  (или ), элементами которого являются всевозможные упорядоченные пары , где  пробегают множество . Если  - подмножество множества , то будем говорить, что  является отношением на множестве .

Сформулируем определение бинарного отношения.

Для любых двух множеств  и  всякое подмножество  называется бинарным отношением между  и .

Бинарные отношения  на множестве  обладают следующими свойствами:

) рефлексивность ;

) симметричность ;

) антисимметричность:   и  ; (или если  и );

) транзитивность  и .

Бинарное отношение  на множестве  называется отношением порядка, если имеют место следующие свойства:

) рефлексивность: ;

) антисимметричность:   и  ;

) транзитивность:   и  .

Интересна геометрическая интерпретация свойств бинарных отношений на числовых множествах. Например, бинарное отношение  будет рефлексивным, если подмножество  множества  будет содержать биссектрису 1 и 3 координатного угла декартова квадрата . В качестве примера можно привести два отношения  и  на множестве R. Отношение  не является рефлексивным, поскольку неравенство строгое и условие  не выполнится ни при каких значениях х на множестве R. А вот отношение  уже будет обладать свойством рефлексивности, так как неравенство  истинное и биссектриса  принадлежит подмножеству .

Бинарное отношение обладает свойством симметричности, если элементы  и  одновременно принадлежат подмножеству , то есть. Данное свойство на множестве N присуще бинарному отношению ,  поскольку на данном множестве нет отрицательных чисел.

Бинарное отношение будет транзитивно, если  и. Геометрически можно заметить, что точки , , , а также (y,y) являются вершинами некоторого прямоугольника.

Бинарное отношение будет транзитивно, когда все вершины этого прямоугольника, принадлежат подмножеству .

Бинарное отношение  является антисимметричным, если  и . Данное свойство выполняется, когда точка с координатами принадлежит подмножеству , а точка с координатами  не принадлежит подмножеству .

Бинарные отношения можно рассматривать на самых различных множествах. Приведем некоторые примеры отношений из алгебры и геометрии.

2.1 Примеры алгебраических бинарных отношений

Пример 2.1.1.

Для действительных чисел будем исследовать свойства бинарных отношений в том случае, когда отношение  задается следующим образом:

 R .

Проверим свойства:

) Рефлексивность будет выполняться, поскольку  для любого  R.

) Данное отношение не будет антисимметрично, поскольку если мы возьмем  и , то мы получим

    .

Проверим выполнение условия в случаи, когда  и 

  

Получили, что , но при этом . Отсюда следует, что данное подмножество не антисимметрично.

3) Проверим транзитивность, тогда должно выполняться следующее условие:

 и  .

Оно, очевидно, будет выполняться для любых элементов из множества R.

) Проверим симметричность на конкретном примере. Предположим  и .

Тогда получаем . Проверим вторую часть свойства: ,  . Данное неравенство неверно, откуда мы делаем вывод, что данное отношение не является симметричным.

Пример 2.1.2.

 - неотрицательные целые числа, определенные отношением 



) Проверим рефлексивность. . Очевидно, что каждое неотрицательное число будет делиться само на себя. Проверим, выполняется ли . Рассмотрим обозначение  как . Тогда, если , получаем, что . Очевидно, что при умножении любого числа на 0 мы получим 0, а значит, свойство рефлексивности выполняется для любого элемента.

) Проверяем симметричность. Должно выполняться следующее условие:

, значит . Запишем посылку и заключение следующим образом:  и . Подставляем значение а в первое уравнение. Получаем:  или . В множестве  мы не найдем двух различных чисел  и , таких, чтобы их произведение давало 1, следовательно, данное отношение не симметрично.

) Проверяем транзитивность.

 и . Это означает следующее:  и . Распишем подробно:  и . Из последнего равенства следует, что , а это, в свою очередь, означает, что свойство транзитивности на данном множестве выполняется.

) Проверим антисимметричность. Должно выполняться условие:  и . Если , то можно сделать вывод, что . Если же , то должно выполнятся условие . Условия  и  выполняются одновременно тогда, когда . Отсюда следует, что антисимметричность выполняется.

О данном отношении можно сказать, что оно является упорядочением множества , поскольку на нем выполняются условия рефлексивности, антисимметричности и транзитивности.

Пример 2.1.3.

Определим отношение  для двух чисел  из множества R, так что  или . Данное подмножество показано на рисунке 1.



Рисунок 1

) Проверим рефлексивность.  или . Это означает, что должно выполняться хотя бы одно из условий  или . Эта совокупность неравенств имеет своим решением все множество действительных чисел. Значит условие рефлексивности выполняется.

) Проверяем, будет ли данное отношение симметричным. Для этого необходимо выполнение следующего условия: . На данном отношении это записывается как  или  или . Возьмем, например,  и , тогда должно выполняться  или . Данные условия выполняются. Проверим вторую часть следствия, где мы видим при подстановке значений  и  следующее:  или . Ни одно из данных неравенств не выполняется, следовательно, данное отношение не обладает свойством симметричности.

) Транзитивность в данном отношении будет выполняться в следующем случае: если  или  и  или , то  или . Для проверки свойства транзитивности возьмем конкретные значения. Пусть ;  и . Мы видим, что при подстановке их в первую часть условия получается, что из совокупностей  или  и  или  хотя бы одно неравенство верно. Но при подстановке этих значений во вторую часть условия, мы получаем  или . Ни одно из неравенств не выполняется, следовательно, условие транзитивности для данного отношения не выполняется.

) Рассмотрим свойство антисимметричности. Если ( или ) и ( и ), то . Возьмем, например,  и . , так как  или  (выполняется хотя бы одно из условий). , так как  или . Но , нарушается определение антисимметричности. Значит, данное подмножество не обладает этим свойством.

Пример 2.1.4.

Возьмем отношение на множестве Z, которое зададим следующим образом: . Подмножество  показано на рисунке 2.



Рисунок 2

) Данное отношение не обладает свойством рефлексивности. Так как неравенство строгое, то условие  не будет выполняться не при каких значениях из множества Z.

) Проверим отношение на симметричность. Должно выполняться следующее условие: . Если мы возьмем любые два значения из множества Z, то убедимся в ложности следствия. Пусть , , получаем . Обратное неверно, поскольку неравенство  не выполняется. Следовательно, отношение не симметрично.

) Проверяем транзитивность. На данном подмножестве транзитивность выполняется, если  и . Пусть ,  и . Получаем  и . На множестве Z условие транзитивности будет выполняться для любых чисел.

) Условие антисимметричности выполняется, если  и . Возьмем  и . Условия в левой части неравенства выполняются, так как  и . Так же выполняется условие в правой части, поскольку неравенство  ложно. Откуда можно сделать вывод, что свойство антисимметричности для данного отношения выполняется.

Пример 2.1.5.

Рассмотрим следующий пример бинарного отношения:  на множестве R. Оно показано на рисунке 3.



Рисунок 3

) Рассмотрим свойство рефлексивности. Данное отношение будет обладать данным свойством, поскольку оно содержит биссектрису . В этом легко убедиться:  R.

) Проверим симметричность. Данное отношение будет симметричным, если будет выполняться условие

; 

Рассмотрим пару чисел , . При подстановке их в левую часть условия, мы получаем . Подставим в правую часть, получаем . Данное неравенство неверно, следовательно, подмножество  не обладает свойством симметричности. Графически данная ситуация показана на рисунке 4.



Рисунок 4

3) Проверим свойство транзитивности. Должно выполняться условие  и ;  и . Возьмем для примера значения ,  и . Получаем следующие выкладки: если  и , то отсюда следует, что . Поскольку неравенство строгое, это утверждение неверно. Отсюда мы делаем вывод, что данное отношение не является транзитивным. Графическая интерпретация показана на рисунке 5.



Рисунок 5

4) Проверяем антисимметричность. Должно выполняться условие

и ;  и . Возьмем для примера  и . Получаем  и . Отсюда следует, что . Неравенство верное, это значит, что отношение  не обладает свойством антисимметричности. Данная ситуация отражена на рисунке 6.



Рисунок 6

Пример 2.1.6.

Рассмотрим бинарное отношение  на множестве N. Графически данное множество изображено на рисунке 7.



Рисунок 7

) Данное отношение обладает свойством рефлексивности, поскольку условие  выполняется для любого элемента из множества N.

) Рассмотрим свойство симметричности. Оно будет выполняться, если истинно условие . Мы видим, что свойство не выполняется на данном множестве, поскольку, если мы возьмем  и , то мы получаем, что  не состоит, поскольку  не делится.

) Проверим свойство транзитивности. Если  и , что в свою очередь означает, если и . Пусть ; , тогда , отсюда следует, что . Значит, данное отношение обладает свойством транзитивности.

) Проверим антисимметричность. Подмножество обладает свойством антисимметричности, если  и ;  и . Пусть  означает , тогда  это . Тогда получаем, что . Получили два случая. , поскольку он принадлежит множеству N, значит . На множестве N данное равенство возможно только в том случае, если  и , а значит . Откуда делаем вывод, что если , то . Значит отношение обладает свойством антисимметричности.

Пример 2.1.7.

Рассмотрим бинарное отношение:  на множестве R.

) Очевидно, что данное отношение не обладает свойством рефлексивности, поскольку  R:  высказывание ложное.

) Проверим свойство симметричности.  R:  . Подставим в первую часть вторую, получаем, что . Равенство не выполняется для любых значений х, следовательно, данное отношение не симметрично.

) Проверяем свойство транзитивности. Должно выполняется следующее условие:  и . Очевидно, что высказывание ложное. Приведем пример. Пусть ,  и , тогда , . Но отсюда не следует, что . Равенство ложное, отношение не обладает свойством транзитивности.

) Проверяем антисимметричность.  и ;  и . Проверим свойство на конкретном примере. Пусть , , тогда  и . Высказывание истинно. Вероятно, данное отношение обладает свойством антисимметричности.

2.2 Примеры бинарных отношений из курса геометрии

Пример 2.2.1.

Рассмотрим - множество прямых на плоскости. Проверим свойства бинарного отношения: . (Прямые  и  параллельны, если они не имеют общих точек или совпадают).

) Данное отношение обладает свойством рефлексивности, если . Поскольку прямая  совпадает сама с собой, то она будет находиться в отношении  сама с собой.

) Проверим, обладает ли подмножество свойством симметричности. ; . На рисунке 8 показаны прямая  и прямая . Очевидно, что отношение будет симметричным, поскольку если , то и .



Рисунок 8

3) Рассмотрим свойство транзитивности. Должно выполнятся следующее условие: ;  и . На рисунке 9 изображены три параллельные прямые. Поскольку они параллельны между собой, то свойство транзитивности на данном подмножестве будет выполняться.



Рисунок 9

4) Рассмотрим свойство антисимметричности. Оно будет выполнятся, если ; . Данное свойство не выполняется на множестве  поскольку, если прямая  параллельна прямой , то и прямая  параллельна прямой .

Пример 2.2.2.

Рассмотрим множество из примера 2.2.1. На нем зададим следующее бинарное отношение: .

) Рассмотрим свойство рефлексивности. Тогда должно выполнятся следующее условие . На рисунке 10 показана произвольная прямая . Если рассматривать перпендикулярность как наличие прямого угла между прямыми, то очевидно, что отношение таким свойством не обладает, поскольку, прямая сама с собой не может образовывать прямой угол.



Рисунок 10

2) Проверим свойство симметричности. Оно будет выполняться при следующем условии: ; . Если мы рассмотрим две перпендикулярные прямые ( и ), как показано на рисунке 11, то мы увидим, что на данном множестве свойство симметричности выполняется, поскольку, если прямая  перпендикулярна прямой , то и обратное верно, так как прямые  и  образуют друг с другом прямой угол.



Рисунок 11

) Рассмотрим свойство транзитивности. Данное подмножество транзитивно, если ;  и . Это утверждение неверно. Рассмотрим рисунок 12. На нем изображены  и . Отсюда видно, что прямая  не перпендикулярна прямой , значит, свойство транзитивности не выполняется.



Рисунок 12

4) Проверим антисимметричность. Данное подмножество не будет обладать свойством антисимметричности, если  и , то есть если  и . Это утверждение неверно, поскольку, если прямая  будет перпендикулярна прямой , то и обратное утверждение будет верно. В этом можно легко убедиться, глядя на рисунок 11. Отсюда делаем вывод, что данное подмножество не обладает свойством антисимметричности.

Пример 2.2.3.

Рассмотрим множество - множество фигур. Расмотрим подмножество подобных фигур. Две фигуры называются подобными, если фигуру  можно отобразить в фигуру . Будем говорить, что  подобно  с коэффициентом подобия .

Рассмотри следующее бинарное отношение:  и  подобны. Далее слово подобие мы будем заменять символом «~».

) Проверим свойство рефлексивности. . Нетрудно понять, что любая фигура подобна сама себе, то есть коэффициент подобия у нее равен 1. Отсюда следует, что подмножество  обладает свойством рефлексивности.

) Рассмотрим свойство симметричности. , то есть если . Если фигура  подобна фигуре  с коэффициентом , то фигура  подобна фигуре  с коэффициентом  (обратное отображение). Отсюда следует, что данное множество обладает свойством симметричности.

) Проверим транзитивность. Должно выполняться следующее условие:  и , то есть если  и  то . Пусть фигура  подобна фигуре  с коэффициентом , а фигура подобна фигуре  с коэффициентом . Тогда фигура подобна фигуре  с коэффициентом . Это значит, что данное отношение транзитивно.

) Проверяем антисимметричность. Данное свойство выполняется, если  и , то есть если  и , то . Как и в свойстве симметричности, если фигура  подобна фигуре  с коэффициентом , то фигура  подобна фигуре  с коэффициентом . Отсюда следует, что фигуры подобны, значит, свойство антисимметричности не выполняется.

3. Обобщающее повторение. Проектная деятельность

математика алгебраический геометрический бинарный

Одним из путей повышения мотивации и эффективности учебной деятельности в школе является включение учащихся в исследовательскую и проектную деятельность. Цели и задачи этих видов деятельности учащихся определяются как их личностными мотивами, так и социальными. Это означает, что такая деятельность должна быть направлена не только на повышение компетенции в предметной области, не только на развитие их способностей, но и на создание проектного продукта. Приведем пример проектного задания для проведения исследования на уроках обобщающего повторения курса математики в контексте ведущего математического понятия «порядковая структура».

Задание.

Рассмотрите виды бинарных отношений:

) Бинарное отношение r называется отношением эквивалентности, если оно обладает одновременно рефлексивностью, симметричностью и транзитивностью (1,2,4 - свойства).

) Бинарное отношение r называется отношением частичного порядка, если оно обладает одновременно рефлексивностью, антисимметричностью и транзитивностью (1,3,4 - свойства).

) Бинарное отношение r называется отношением линейного порядка, если оно обладает свойством упорядоченности и является отношением частичного порядка.

Ниже приведена таблица (таблица 1) с примерами бинарных отношений как продукт исследовательской деятельности учащихся классов с углубленным изучением математики:

Таблица 1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Описание бинарного отношения | Свойства | | | | Вид этого бинарного отношения |
|  | 1 рефл. | 2 сим. | 3 антисим. | 4 транз. |  |
| хr1 у Ы "х делит у", где х, у О N. | + | - | + | + | Отношение частичного порядка. |
| хr2 у Ы "х делит у", где х, у О Z. | - | - | - | + | - |
| хr3 у Ы "х делится на у", где х, у О N. | + | - | + | + | Отношение частичного порядка. |
| хr4 у Ы "х Ј у", где х, у О R. | + | - | + | + | Отношение частичного порядка, обладающее свойством упорядоченности - линейный порядок. |
| хr5 у Ы "х = у", где х, у О Х и Х - множество чисел. | + | + | + | + | Отношение эквивалентности. |
| хr6 у Ы "х № у", где х, у О N. | - | + | - | - | - |
| хr7 у Ы "х = у", где х, у О Х и Х - множество геометрических фигур. | + | + | + | + | Отношение эквивалентности. |
| хr8 у Ы "х подобно у", где х, у О Х и Х - множество геометрических фигур. | + | + | - | + | Отношение эквивалентности. |
| хr9 у Ы "х = у", где х, у О Х и Х - множество векторов. | + | + | + | + | Отношение эквивалентности. |
| хr10 у Ы "х коллинеарен у", где х, у О Х, Х - множество всех векторов на плоскости (в пространстве). | + | + | - | - | - |
| хr11 у Ы "х коллинеарен у", где х, у О Х, Х - множество ненулевых векторов на плоскости (в пространстве) | + | + | - | + | Отношение эквивалентности. |
| хr12 у Ы "х Н у", где х О Х, у О Y, Х-произвольное непустое множество, a Y-множество, элементами которого служат некоторые подмножества множества Х. | + | - | + | + | Отношение частичного порядка. |
| хr13 у Ы "х К у", где х О Х, у О Y, Х-произвольное непустое множество, a Y-множество, элементами которого служат некоторые подмножества множества Х. | + | - | + | + | Отношение частичного порядка. |
| хr14 у Ы "х Н у", где х, у О W(Х), X = {1,2,3} а W(Х) = {(Ж), {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2,3}} -совокупность подмножеств множества Х. | + | - | + | + | Отношение частичного порядка. |

Список использованных источников

1. Беран Л. Упорядоченные множества. М.: Наука, 1981.

. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М.: ИЛ., 1963.

. Гнеденко Б.В. Математика и математическое образование в современном мире. М.: Просвещение, 1985. - 191 с.

. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры. М.: Физматлит, 2004.

. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. М.: Наука, 1973.

. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 8 класс. Учебник. М.: Просвещение, 2013.

. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г. Алгебра. 9 класс. Учебник. М.: Просвещение, 2009.

. Манин Ю.И. Математика и физика. М.: Знание, 1979. С. 63.

. Пиаже Ж. Структуры математические и операторные структуры мышления // Преподавание математики. М.: Учпедгиз, 1960. С. 10 - 30.

. Погорелов А.В. Геометрия учебник для 7 - 9 классов. М.: Просвещение, 2009.

. Тестов В.А. Стратегия обучения математике. М.: Технологическая Школа Бизнеса, 1999. С. 304.

. Цыпкин А.Г. Справочник по математике. М.: Наука, 1980.