Чернігівський національний педагогічний університет імені Т.Г. Шевченка

Кафедра вищої та прикладної математики

КУРСОВА РОБОТА

з геометрії

на тему: Елементи сферичної геометрії

Студентки

Лисиці Олесі Василівни

м. Чернігів - 2014 рік

Зміст

Вступ

. Основні поняття

.1 Виникнення і розвиток сферичної геометрії

1.2 Сфера, велика і мала окружності

1.3 Відстань між двома точками на сфері

.4 Кути на сфері

.5 Сферичні трикутники

. Теореми сферичної тригонометрії

2.1 Зв'язок між величинами сторін та кутів прямокутного сферичного трикутника

.2 Сума кутів сферичного трикутника

.3 Сферична теорема косинусів

.4 Сферична теорема синусів

. Застосування сферичної геометрії

.1 Стереографічна сітка Вульфа

.2 Приклади розв’язання типових задач

Висновок

Література

Вступ

Упродовж багатьох стол <http://mnogomeb.ru/>іть людство не переставало поповнювати свої наукові знання на тій чи іншій галузі. Стереометрія, як наука про постатях у просторі, невід'ємно пов'язана з багатьма науковими дисциплінами. До таких дисциплін відносяться: математика <http://foxford.ru/>, фізика, інформатика і програмування, і навіть хімія і біологія. Основна проблема вивчення мікросвіту, що є надзвичайно складну комбінацію різних частинок в просторі щодо один до одного. В архітектурі постійно використовуються теореми і наслідки з стереометрії. Безліч вчених геометр <http://foxford.ru/>ів цікавилися такою фігурою як кулею та її «оболонкою», яка називається сфера. Дивно, але куля єдине тіло, яке має меншою площу поверхні при обсязі, рівному обсягу інших порівнюваних тіл, як-от куб, призма або інші різноманітні багатогранники. З кулями ми маємо справу щодня.

Приміром, кожна людина користується кульковою ручкою, на кінці стержня якої вмонтовано металеву кулю, обертаючись під впливом сил тертя стержня і паперу і під час повороту у своїй поверхні кулю «виносить» чергову подачу чорнила. У автомобільну промисловість виготовляються кульові опори, які є дуже важливою деталлю в автомобілі і забезпечує правильний поворот коліс і стійкість машини.Елементи машин, літаків, ракет, мотоциклів, снарядів, плавальних судів, котрі піддаються постійним впливам води чи повітря, переважно мають якісь сферичні поверхні, звані обтекателями. Використання знання кулі і сфері призвело до виникнення нового розділу математики <http://foxford.ru/> - сферичної геометрії, у якій вивчаються фігури, розташовані на сфері.

1. Основні поняття сферичної геометрії

Сферична геометрія вивчає геометричні властивості фігур, розміщених на сфері. Основними поняттями сферичної геометрії є поняття точки і великого кола сфери. Позначимо точки літерами А, В, С, …, а великі кола і їх частини літерами a, b, c, …. Сферичну поверхню з центром О і радіусом R позначатимемо (O,R), або сфера О.

Нагадаємо ряд тверджень, що лежать в основі сферичної геометрії:

Переріз сфери будь-якою площиною є колом. Площина, що проходить через центр сфери, називається діаметральною площиною, а лінія її перетину зі сферою - великим колом. Великі кола сфери ділять її на дві рівні частини. Площина великого кола є площиною симетрії сфери, а центр сфери - її центром симетрії.

Через дві не діаметрально протилежні точки сфери можна провести велике коло, і притому тільки одне. Два великих кола сфери перетинаються в двох точках. Взагалі два будь-які кола, що лежать на одній і тій самій сфері, можуть перетинатись не більш як у двох точках, де лінія перетину їх площин перетинає сферу.

Між плоскою і сферичною геометріями є багато спільного. Це можна пояснити тим, що для сфери характерна така ж „рухомість”, як і для площини: кожну точку площини і напрямок, що виходить із неї (рис. 1.1), можна сумістити рухом цієї площини із будь-якою іншою точкою площини і напрямком, який з неї виходить, і так само кожну точку сфери і напрям, що виходить з неї (рис. 1.1), можна сумістити рухом будь-якої іншої точки сфери і напрямком, який з неї виходить.



Рис. 1

.1 Виникнення и розвиток сферичної геометрії

Першою за часом геометрією <http://ua-referat.com/%D0%93%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F>, відмінної від евклідової, була сферична геометр <http://foxford.ru/>ія, або Сферика, як її називали древні. Сферика виникла пізніше, ніж евклідова геометр <http://foxford.ru/>ія площині і простору. Основними стимулами для виникнення геометрії <http://ua-referat.com/%D0%92%D0%B8%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F\_%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D1%96%D1%97> площині і простору була необхідність вимірювання площ полів та інших плоских фігур та місткості судин і комор різної форми, тобто об'ємів різних тіл. Основним стимулом для виникнення Сферика було вивчення зоряного неба. Спостереження небесних світил проводилося ще в Стародавньому Єгипті і Вавилоні <http://ua-referat.com/%D0%92%D0%B0%D0%B2%D0%B8%D0%BB%D0%BE%D0%BD>, перш за все з метою встановлення календаря. Ми зобов'язані єгиптянам поділом доби на 24 години.

Внесок вавілонян у розвитку астрономії був більш значним: спостереження затемнень і зірок перших століть «ери Набонасара», що розпочалася у VIII ст. до н. е.. Стародавні греки познайомилися з вавилонської астрономією <http://ua-referat.com/%D0%90%D1%81%D1%82%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%BE%D0%BC%D0%B8%D1%8F> принаймні в IV ст. до н.е., коли первісні назви планет були замінені назвами планет по вавилонському зразком, латинськими <http://ua-referat.com/%D0%9B%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BD%D1%81%D1%8C%D0%BA%D0%B0> перекладами <http://ua-referat.com/%D0%9F%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BA%D0%BB%D0%B0%D0%B4> яких є загальноприйняті нами назви. Астрономія <http://ua-referat.com/%D0%90%D1%81%D1%82%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%BE%D0%BC%D0%B8%D1%8F>, викладена в «Альмагест» Птолемея, була результатом тривав кілька століть розвитку науки <http://ua-referat.com/%D0%9D%D0%B0%D1%83%D0%BA%D0%B8>, яка увібрала традиції як вавілонських астрономів, так і грецьких геометр <http://foxford.ru/>ів.

Сферика Феодосія. Перше що дійшло до нас систематичний виклад сферичної геометр <http://foxford.ru/>ії міститься в «Сферика» Феодосія, який жив у II-I ст. до н.е. «Сферика» Феодосія складається з трьох книг, у першій з яких шість визначень і 23 пропозиції, у другій - одне визначення і 23 пропозиції, у третій - 14 пропозицій. Визначення 1 Феодосія: «Сфера є тілесна фігура, яка містить всередині однієї поверхні <http://ua-referat.com/%D0%9F%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D1%80%D1%85%D0%BD%D1%96>, така, що всі прямі, які падають на неї з однієї точки в середині фігури <http://ua-referat.com/%D0%A4%D1%96%D0%B3%D1%83%D1%80%D0%B8>, рівні між собою». Більшість пропозицій «Сферика» Феодосія - стереометричні <http://ua-referat.com/%D0%A1%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D1%96%D1%8F> теореми і задачі на побудову. Коли Феодосій говорить про перетин кіл на сфері під деяким кутом або про паралельність цих кіл, він <http://ua-referat.com/%D0%92%D1%96%D0%BD> має на увазі перетин під даним кутом або паралельність їх площин; коли він говорить про розтин колами на сфері один одного навпіл, він має на увазі розсічення навпіл плоских фігур.

Поряд зі стереометричних пропозиціями <http://ua-referat.com/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%BF%D0%BE%D0%B7%D0%B8%D1%86%D1%96%D1%8F>, сформульовані в термінах <http://ua-referat.com/%D0%A2%D0%B5%D1%80%D0%BC%D1%96%D0%BD%D0%B8> геометр <http://foxford.ru/>ії на поверхні сфери. Наприклад, пропозиції 20-21 із I книги - завдання про побудову великого кола на сфері, що проходить через дві точки її поверхні, і задача про побудову полюса даного кола на сфері. Сферика Менелая. Значно більш розвинену сферичну геометрію можна знайти в трактаті «Про сфері» Менелая, який жив в кінці I ст. н. е.. Твір Менелая збереглося тільки в арабському перекладі <http://ua-referat.com/%D0%9F%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BA%D0%BB%D0%B0%D0%B4> в декількох обробках <http://ua-referat.com/%D0%9E%D0%B1%D1%80%D0%BE%D0%B1%D0%BA%D0%B0>, кращими з яких є обробки Абу Насра ібн Іраку і Насир ад-Діна ат-Тусі. «Сферика Менелая складається з трьох книг, що містять відповідно <http://ua-referat.com/%D0%92%D1%96%D0%B4%D0%BF%D0%BE%D0%B2%D1%96%D0%B4%D1%8C> 39, 21 і 25 пропозицій. У вступі до книжки I Менелай <http://ua-referat.com/%D0%9C%D0%B5%D0%BD%D0%B5%D0%BB%D0%B0%D0%B9> дає визначення сферичного трикутника («тристоронньої фігури»), тобто частини поверхні, обмеженої трьома дугами великих кіл, меншими півколами, і кутів сферичного трикутника. Якщо більшість пропозицій «Сферика» Феодосія були стереометричних, твір Менелая присвячено геометр <http://foxford.ru/>ії на поверхні сфери, трактованої за аналогією з планіметрії Евкліда. Наприклад, пропозиція <http://ua-referat.com/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%BF%D0%BE%D0%B7%D0%B8%D1%86%D1%96%D1%8F> 1 книги I - завдання про проведення дуги великого кола під даним кутом до даної дузі великого кола; пропозиції 2 і 3 книги I - теорема про рівність кутів при основі рівнобедреного сферичного трикутника і зворотна їй.

З пропозицій не збігаються з пропозиціями планіметрії, відзначимо пропозиції 10 і 11, з яких випливає, що сума кутів сферичного трикутника більше двох прямих кутів. «Пропозиція десята. Якщо дві сторони тристоронньої фігури разом менше півкола, то зовнішній кут, що прилягає до однієї з цих сторін, більше протилежному йому внутрішньому куту, який є одним з двох кутів, прилеглих до того, що залишилася осторонь, якщо дві сторони разом більше півкола, то зовнішній кут менше протилежного йому внутрішнього кута; а якщо дві сторони разом рівні півколу, то зовнішній кут дорівнює протилежному йому внутрішньому».

«Пропозиція одинадцята. Зовнішній кут всякої тристоронньої фігури менше обох протилежних йому внутрішніх кутів. Площа сферичного трикутника і багатокутника у Жирара. Вираз площі сферичного трикутника і багатокутника через їх кутові надлишки вперше з'явилося у пресі в статті «Про міру поверхні сферичних трикутників і багатокутників, відкритої знову», опублікованій у вигляді додатку до «Нового відкриттю в алгебрі» фламандського математика <http://ua-referat.com/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0> Альбера Жирара. (1595-1632). Основні теореми сферичної тригонометрії були відкриті вченими середньовічного <http://ua-referat.com/%D0%A1%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%BD%D1%8C%D0%BE%D0%B2%D1%96%D1%87%D1%87%D1%8F> Сходу. Співвідношення, що виражаються теоремою косинусів, були встановлені сирійським математиком <http://ua-referat.com/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0> і астрономом IX століття ал-Баттані, вихідцем з родини зореприхильників - сабіев, у яких протягом багатьох століть зберігалися вавилонські астрономічні <http://ua-referat.com/%D0%90%D1%81%D1%82%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%BE%D0%BC%D0%B8%D1%8F> традиції. Сферична теорема синусів була відкрита майже одночасно середньоазіатськимиматематиками <http://ua-referat.com/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0> і астрономами <http://ua-referat.com/%D0%90%D1%81%D1%82%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%BE%D0%BC%D0%B8%D1%8F> X століття Ібн Іраком з Хорезму, Абу-л-Вафой з Хорасана і ал-Ходжанді з Ходжента. Співвідношення, що виражаються двоїстої теоремою косинусів, були встановлені (за допомогою полярного трикутника) в XIII столітті працювали в Азербайджані <http://ua-referat.com/%D0%90%D0%B7%D0%B5%D1%80%D0%B1%D0%B0%D0%B9%D0%B4%D0%B6%D0%B0%D0%BD> Насир-ад-Діном ат - Тусі, що дав перше повне виклад всієї системи сферичної тригонометрії.

Це означало, що постало питання про створення й про математичну обробку нової, більш глибокої, астрономічної теорії руху небесних тіл, що більш точно відображає їх дійсні рухи, ніж описувала система Птолемея.

1.2 Сфера, велика і мала окружності

Сферою називається геометричне місце точок простору, розташованих на даному відстані від даної точки, яку називають її центром. Відрізок, що сполучає центр сфери з будь-якої його точкою, називається радіусом сфери. Відрізок, що сполучає дві точки сфери і проходить, крім того, через його центр, називається діаметром. З визначення випливає, що всі радіуси рівні і що діаметр дорівнює подвоєному радіусу. Площина, що проходить через центр сфери, називається діаметральної площиною. Нехай S-деяка сфера з центром O радіуса R. Візьмемо площину a, віддалену від точки O на відстань, меншу R. Тоді перетину площини a і сфери S є коло. Радіус r цього кола є катетом прямокутного трикутника (рис. 1.2), гіпотенуза якого - радіус R, а другий катет - перпендикуляр h, опущений з центра сфери на площину. Тому в силу теореми Піфагора.



Рис. 2

Ця формула показує, що величина r приймає максимальне значення r = R при h = 0, тобто є діаметральної площиною. У цьому випадку коло на сфері і називається великий колом. В геометрії на сфері великі кола грають роль прямих на площині. При h> 0 ми маємо r <R, окружність на сфері називається в цьому випадку малим колом. Так як через всякі три точки простору, що не лежать на одній прямій, проходить єдина площина, то через всякі дві точки сфери, які не є діаметрально протилежними проходить єдина діаметральна площина. Тому через всякі дві точки сфери, які не є діаметрально протилежними, проходить єдина велика окружність (рис.1.4). Цей факт цілком аналогічний тому, що на площині через всякі дві точки проходить єдина пряма. Через дві діаметрально протилежні точки сфери, навпаки, можна провести нескінченну безліч великих кіл. Адже всілякі дві діаметральні площині сфери перетинаються за її діаметра, то всякі дві великі кола перетинаються в двох діаметрально протилежних точках сфери (рис. 1.6)Тут ми спостерігаємо відміну сферичної геометрії від плоскої геометрії, в якій дві прямі перетинаються не більш ніж в одній точці.

Так як площину ділить простір на дві області, то велика окружність ділить сферу на дві області; ці області називаються півсферами, а сама окружність - краєм цих півсфер. Далі, оскільки дві перехресний площині ділять простір на чотири області, то дві великі кола ділять сферу на чотири області. Нарешті, так як три площини, що перетинаються в одній точці, ділять простір на вісім областей, то три великі кола, які не перетинаються в одній точці, ділять сфери на вісім областей

1.3 Відстань між двома точками на сфері

Важливим є поняття про найкоротшу відстань між двома точками на сфері. У геометрії Евкліда найкоротшою відстанню між двома точками є відрізок прямої, що сполучає ці точки. На сфері найкоротшою відстанню між точками є дуга великого кола, що проходить через ці точки. Як відомо, через дві точки площини (і простору) можна провести пряму і тільки одну. Так само через дві точки на сфері, які не є діаметрально протилежними, завжди можна провести велике коло і тільки одне.

На пряму на площині не потрібно накладати ніяких обмежень, а на велике коло, на точки А і В сфери ми наклали умову, щоб вони не були кінцями одного й того самого діаметра, бо тоді можна провести вже не одне велике коло, а безліч. У цьому перша аналогія й відмінність між великими колами сфери й прямими на площині.

Переконаємося, що дуга великого кола є найкоротшою відстанню між точками на сфері.

Довжина найкоротшої лінії, що сполучає дві точки А і В сфери, називається сферичною відстанню між точками А і В.

Теорема 1. Сферичною відстанню між двома точками на сфері є дуга великого кола, менша від 180°.



Рис. 3

Нехай А і В - дві точки сфери О (рис. 3). Через хорду АВ можна провести безліч площин, кожна з яких перетинатиме сферу по деякому колу. Серед цих кіл найбільшим є велике коло. Для доведення теореми досить показати, що серед усіх дуг сфери, для яких відрізок АВ - спільна хорда, найменшою є дуга великого кола.

Під дугою великого кола, що сполучає дві точки, або просто дугою, будемо розуміти дугу, меншу від 180°. Дійсно, вмістимо всі дуги в одну площину великого кола поворотом кожного кола навколо хорди А, причому нехай менші з двох дуг АВ кожного кола лежатимуть з одного боку від хорди А. З двох таких дуг меншою буде та, яка має більший радіус (рис. 1.9).

Нехай r - радіус дуги АВС більшого кола з центром у точці О, а r1 - радіус дуги АС1В меншого кола з центром у точці О1. Тоді з трикутника ОО1А маємо: О О1 + r1> r або ОС1 > ОС. Оскільки радіус дуги великого кола буде найбільшим, то дуга АВ цього кола буде найкоротшою. Це дає підставу стверджувати, що велике коло на сфері має схожість з прямою на площині.

Але й тут між ними є деяка відмінність. Через дві точки на сфері, що не лежать на кінцях одного й того самого діаметра, можна провести єдине велике коло, при цьому дані дві точки поділяють коло на дві нерівні частини (рис. 4) - на меншу частину АМВ і більшу ВNА. Оскільки сума цих дуг дорівнює 360°, то менша дуга АМВ менша 180°, а більша дуга ВNА більша 180°. Очевидно, що твердження про найкоротшу відстань стосується тільки дуги АМВ, меншої від 180°. Тому не випадково ця умова є в теоремі 1. Отже, дуга великого кола, менша від 180°, є найкоротшою лінією на сфері.



Рис. 4

Щоб не робити кожного разу таких обмежень щодо найкоротшої відстані між двома точками на сфері, у сферичній геометрії, Ейлер запропонував, розглядати тільки дуги, менші від 180°. Ця пропозиція Ейлера відома під назвою обмеження Ейлера. Дійсно, якщо дотримуватись обмеження Ейлера, то ні в попередній, ні в щойно розглянутій аналогії між дугою великого кола й прямою на площині не потрібно накладати додаткових умов.

Існує й третя аналогія, а саме: дві прямі на площині перетинаються тільки в одній точці; дві дуги великих кіл, які задовольняють обмеження Ейлера, перетинаються в одній точці. Отже, точка на сфері визначається перетином двох дуг великих кіл.

У порівнянні із площиною тут є одна особливість: дві дуги великих кіл (при їх продовженні) обов'язково перетнуться у двох діаметрально протилежних точках.

В елементарній сферичній геометрії, як правило, розглядаються тільки фігури, утворені дугами великих кіл, які задовольняють обмеження Ейлера. Крім таких фігур, у сферичній геометрії розглядаються й малі кола.

Ми вже знаємо, що діаметр, перпендикулярний до площини якого-небудь великого кола сфери, перетинає її у двох точках Р і Р', які називаються полюсами цього кола або його дуги (рис. 5).



Рис. 5

Велике коло QМР називають геометричним екватором, або полярою точок Р і Р'.

Справедлива така теорема:

Теорема 2. Всі точки поляри рівновіддалені від свого полюса на сферичну відстань, яка дорівнює 90°.

Візьмемо на полярі довільне число точок A,B,C,D…. І будуємо в площині ABC відрізки OA, OB, OC, OD,…. (рис. 1.5). За означенням відрізок ОР перпендикулярний до площини ABC. Отже, ОР OA, ОР ОB, ОР ОC, ОР ОD, бо відрізки ОA, ОB, ОC, ОD проходять через основу перпендикуляра ОР і лежать у площині ОAB. Звідси РA = РB = РC= РD =... = 90°. Отже, теорему доведено.

Таким чином, полюс даної дуги великого кола є точка на сфері, віддалена від усіх точок цієї дуги на 90°. Дуги РA, РB, РC, РD,... називаються сферичними радіусами кола ОAB.

Оскільки цим дугам відповідають прямі центральні кути, то їх називають квадрантами, або чвертями, великого кола. Очевидно, що всі квадранти даної сфери рівні між собою.

Справедлива обернена теорема.

Теорема 3. Якщо дана точка сфери віддалена на 90° від двох будь-яких не діаметрально протилежних точок даної дуги, то вона є полюсом цієї дуги великого кола.

.4 Кути на сфері

Кутом на сфері називається фігура, утворена деякою точкою (наприклад, P) і двома півколами (наприклад, PAP1 і PBP1), спільним кінцем яких є ця точка. Точка P називається вершиною кута, півкола - його сторонами. Будемо позначати сферичний кут, як і в геометрії наплощині, через кут A PB (рис. 6).



Рис. 6

Теорема. Сферичний кут APB вимірюється дугою АВ, що лежить між його сторонами, для якої вершина кута (точка Р) є полюсом.

Проведемо площини РР1А і РР1В відповідно через діаметр Р Р1 та точки А і В. Ці площини можна назвати площинами сторін сферичного кута APB.

Утворений при цьому двогранний кут АР Р1В буде відповідати сферичному куту APB. До кожної із сторін кута APB проведемо дотичні РА1 і РВ1. За властивістю дотичної кожна з них лежить у площині тієї дуги, до якої вона дотикається, і буде перпендикулярна до радіуса ОР, проведеного в точку дотику, тобто А1Р перпендикулярна РО і В1Р перпендикулярна до РО.

Отже, кут А1РВ1 є лінійним кутом двогранного кута АР Р1В. Проведемо через центр сфери О площину САВ перпендикулярну до діаметра Р Р1. Переріз буде дугою великого кола САВ, для якої точка Р є полюсом. За побудовою ОВ1 перпендикулярна Р Р1 і ОА перпендикулярна Р Р1. Отже, кут АОВ також буде лінійним кутом двогранного кута АР Р1В. Оскільки кут АОВ центральний, то він вимірюється дугою кола АВ, на яку він спирається. Таким чином, для розглянутих кутів можна записати такі рівності: сферичний ∟АРВ=∟АР Р1В= ∟А1РВ1•∟АОВ, вимірюється дугою АВ. Отже, сферичний кут АРВ вимірюється дугою АВ, що й треба було довести.

Кутом між двома лініями, що перетинаються в просторі називається кут між дотичними до цих ліній в точці їх перетину. Частинним випадком загального поняття кута між двома лініями є кут між двома великими колами на сфері. На рис. 7 зображений кут ВАС між великими колами АВ і АС на сфері і XAY, що вимірює цей кут між дотичними АХ та AY до цих великих кіл.



Рис. 7

Якщо ми проведемо велике коло, яке є полярою вершини А кута на сфері і яке перетинає сторони цього кута в точках В і С, то промені ОВ і ОС відповідно паралельні кутам АХ та АY, дотичним до сторін кута (рис. 1.8). Тому довжина дуги великого кола ВС рівна відношенню ВАС на радіус сфери, тобто кут на сфері рівний довжині дуги великого кола між точками сторін кута, полярно спряженими з вершиною кута, поділеною на радіус сфери.

Має місце теорема:

Теорема. Так як два кути ВАС і ВА΄С, утворені двома півколами при їх різних кінцях, рівні одному і тому ж куту ВОС, то ці кути рівні між собою і величина кожного з них називається кутом між двома великими півколами.

Два великі кола визначають чотири кути між двома півколами попарно рівними один одному. Ті з цих кутів, дві сторони яких є продовженням сторін другого кута, рівні і називаються вертикальними кутами (рис. 1.8); ті з цих кутів які мають одну спільну сторону, становлять в сумі розгорнутий кут π і називаються суміжними кутами (рис. 8).

а) б) 

Рис. 8

Наслідки. 1. Мірою сферичного кута є:

а) двогранний кут, утворений гранями АРР1 і ВРР1;

б) лінійний кут АОВ;

в) дуга АВ, яка є полярою для вершини Р;

г) кут між дотичними у вершині Р, проведеними до сторін сферичного кута.

. Дуга великого кола, яка проходить через полюс, перпендикулярна до поляри, тобто дуга РА перпендикулярна до дуги АВ. Дійсно, із стереометрії відомо, що площина АРР1 (рис. 1.13), яка проходить через пряму РР1, перпендикулярну до площини САВ, буде також перпендикулярна до цієї площини. Звідси двогранний кут ВАОР, утворений цими площинами, дорівнює 90° градусів, отже, і відповідний йому сферичний кут також рівний 90° градусів, а це і означає, що дуга РА перпендикулярна до дуги АВ, якщо сферичний кут між ними дорівнює 90° градусів.

. Сферичний перпендикуляр до даної дуги великого кола проходить через її полюс.

. Суміжні сферичні кути в сумі дорівнюють 180° градусів (рис. 1.8). Сферичні кути ВАР і АРС за аналогією до суміжних кутів на площині називаються суміжними сферичними кутами. Оскільки кут ВРА вимірюється дугою ВА, а кут АРС вимірюється дугою АС, то ∟ВРА+ ∟АРС = 180°, бо В А + АС = 180°.

. Вертикальні сферичні кути рівні. Для дуг великого кола на сфері вводиться поняття рівності залежно від відповідних центральних кутів. Дуга великого кола, що відповідає розгорнутому центральному куту, називається півколом; всі такі півкола рівні між собою, оскільки всі розгорнуті кути рівні між собою.

.5 Сферичний трикутник та його елементи

Сферичним трикутником називається частина поверхні сфери, обмежена трьома дугами великих кіл, що взаємно перетинаються.

У подальшому будемо розглядати тільки так звані Ейлерові сферичні трикутники. У таких трикутників кути та сторони змінюються лише в межах від 0° до 180°.

Оскільки через дві точки, що не лежать на одному діаметрі, можна провести тільки одну дугу великого кола, меншу за 180°, то побудова трикутника на поверхні сфери є однозначною.

Площини великих кіл, якщо їх дуги утворюють сферичний трикутник , перетинаються між собою у центрі сфери  та утворюють тригранник  (рис. 9).



Рис. 9

Сферичний трикутник має шість основних елементів: три кути , ,  та три сторони , , . Кути позначаються тими ж великими літерами, що й вершини трикутника, а протилежні їм сторони - відповідними малими буквами.

Із рис.1.9 видно, що кути сферичного трикутника рівні відповідним двогранним кутам тригранника. Сторони трикутника, визначені у кутовій чи радіанній мірі, дорівнюють відповідним плоским кутам тригранника. Тобто, усі шість елементів сферичного трикутника дорівнюють відповідним елементам тригранника.

Оскільки сторони сферичного трикутника ,  та . прийнято вимірювати у кутовій або радіанній мірі, то вибір радіуса сфери стає не суттєвим. Це видно з рис. 10. Трикутники  та  − подібні. Вони мають різні (пропорційні) лінійні розміри, але їх елементи, відображені у кутовій мірі, є відповідно рівними. Тому з метою спрощення доведення формул радіус сфери приймають за одиницю, тобто беруть .



Рис. 10

За формою сферичні трикутники поділяють на:

) прямокутні, якщо хоча б один із кутів трикутника дорівнює 90°;

) прямосторонні, якщо хоча б одна із сторін трикутника дорівнює 90°;

) косокутні - в інших випадках.

Сферичні трикутники (по їх означенню) одночасно можуть бути прямокутними та прямосторонніми. Таким, наприклад, є трикутник  рис. 10, який має кути при вершинах  та  та сторони  та , що дорівнюють 90°. Можливо побудувати сферичний трикутник, що має всі сторони та всі кути, що дорівнюють 90°. Цей трикутник являє собою восьму частину поверхні сфери та утворюється перетином трьох великих кіл з взаємно перпендикулярними площинами.

У сферичній геометрії, за аналогією до геометрії на площині, прийняті також поняття про рівнобічні та рівносторонні трикутники.

Розв’язання сферичних трикутників складає предмет сферичної тригонометрії та знаходить застосування в астрономії, картографії, навігації, вищій геодезії, кристалографії, фотограмметрії та при розв’язанні різноманітних геометричних задач у ряді інших дисциплін.

2. Сферична тригонометрія

Сферична тригонометрія - розділ тригонометрії, в якому вивчається залежність між величинами кутів і довжинами сторін трикутників, а також алгебраїчними тотожностями тригомонетричних функцій відносно сферичних трикутників. Застосовується для вирішення різних геодезичних та астрономічних задач.

Нехай А, В, С -кути і а, b, с - протилежні їм сторони сферичного трикутника ABC (рис.10). Кути і сторони сферичного трикутника пов’язані наступнини сферичними формулами. Сферична тригонометрія:

а = cos b cos с + sin b sin с cos А,A = -cos B cos С + sin B sin С cos a,a cos B = cos b sin c -sin b cos с cos А,А cosb=cos B sin C +sin B cos С cosa;

В цих формулах сторони а, b, с відповідними центральними кутами.

Для прямокутних сферичних трикутників (А = 90`, а - гіпотенуза, b, с- катети) формули сферичної тригонометрії спрощуются, наприклад:

b = sin a sin В,a = cos b cos c,a cos B = cos b sin c.

Формули сферичної тригонометрії дозволяють за будь-якими трьома елементами сферичного трикутника визнчити трі інші(обчислити трикутник).

Розглянуті елементи сферичної геометрії дають нам узагальнене уявлення про дану область математичної науки.

2.1 Зв'язок між величинами сторін та кутів прямокутного сферичного трикутника

а) Для зв’язку гіпотенузи та катетів маємо сферичну формулу Піфагора: .

) Нехай кожний із катетів менше 90, тоді  та  додатні, але тоді і  додатний, а тому .

) Якщо кожний із катетів більше 90, то  і  обидва від’ємні, а тому  додатній і .

) Якщо один із катетів більше 90, а другий менше 90, то один косинус катета буде додатний, а другий - від’ємний, а тому  буде від’ємний і .

Домовимось називати два елементи трикутника однорідними, якщо обидва вони більше або менше за 90, і різнорідними у тому випадку, коли один із них більший, а другий менший за 90. При цій умові маємо такі співвідношення між величинами катетів і гіпотенузи сферичного трикутника: якщо катети прямокутного сферичного трикутника однорідні, то гіпотенуза менша зо 90; якщо ж катети різнорідні, то гіпотенуза більша за 90.

б) Для зв’язку гіпотенузи з прилеглими до неї кутами маємо формулу . Проведемо аналіз цієї формули за аналогією проведеному аналізу формули  та установимо наступні співвідношення між гіпотезою та прилеглими до неї кутами: якщо прилеглі до гіпотенузи кути однорідні, то гіпотенуза меша за 90.

в) Для зв’язку одного катета та двох кутів, що прилягають до гіпотенузи, маємо співвідношення: ;  завжди додатній у незалежності від того, тупий чи гострий кут , а тому знак  буде такий же як у . Завжди випливає, що довільний катет сферичного трикутника і протилежний йому кут зажди однорідні.

г) Одержані співвідношення між величинами сторін і кутів прямокутного сферичного трикутника допоможуть у подальшому, при визначенні елементів прямокутного трикутника за їх синусами, вибирати, яке із двох значень елемента є дійсним.

.2 Сума кутів сферичного трикутника

Теорема. У будь-якому сферичному трикутнику різниця суми двох будь-яких кутів і третього завжди менша двох прямих кутів.

Доведення. За властивостями полярних трикутників,маємо: a1+b1 >c1, a1=180°-∠А, b1=180°-∠В c1=180°-∠C Зробивши в нерівності заміну, дістанемо: (180°-∠A)+(180°-∠B) >180°-∠C, aбо після спрощення:

∠A+∠B-∠C <180°, що й треба було довести.

Теорема 2. У будь-якому сферичному трикутнику сума кутів завжди менша 540° і більша від 180°, тобто 180° <∠A+∠B+∠C < 540°.

Доведення. Розглянемо сферичний трикутник АВС і полярний відносно нього трикутник А1В1С1. За теоремою 6,4 Сума сторін (периметр) сферичного трикутника завжди менша за 360° і більша від нуля, у кожному сферичному трикутнику 0°<а+b+с<360°, Для трикутника А1В1С1, полярного відносно трикутника АВС, вона теж справджується, запишемо подвійну нерівність, як дві нерівності, а саме:

а1+b1+с1<360°, (1)

а1+b1+с1>0°. (2)

За властивостями сферичних полярних трикутників маємо:

1=180°-∠А, b1=180°-∠В c1=180°-∠C. (3)

Підставивши в нерівність (1) замість a1, b1, c1 їх вирази через праві частини рівностей (3), дістанемо: (180°-∠А)+ (180°-∠В)+ (180°-∠C)< 360°, або після спрощення ∠A+∠B+∠C >180°.

Першу частини теореми доведено.

Виконавши таку саму підстановку виразів (3) у нерівність (2), матимемо: (180°-∠А)+ (180°-∠В)+ (180°-∠C)>0°, або після спрощення ∠A+∠B+∠C <540°.

Теорему доведено.

Наслідок. Сума кутів у сферичному трикутнику є величина змінна і завжди більша від 180°, тобто ∠A+∠B+∠C =180°+ε.

Означення. Різниця ∠A+∠B+∠C -180°= ε між сумою сферичного трикутника і сумою кутів трикутника називається сферичним надвишком трикутника. Зрозуміло, що 0°< ε ≤360°.

Зауважимо, що у сферичному трикутнику поняття бісектриси, медіани і висоти, а також співвідношення між сторонами і кутами мають такий зміст, як і в трикутнику на площині.

Зокрема мають місце такі твердження:

1. Проти рівних сторін сферичного трикутника лежать рівні кути і навпаки.

. У будь-якому сферичному трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона і навпаки.

. У рівнобедреному сферичному трикутнику кути, що лежать проти рівних сторін, рівні.

.3 Сферична теорема косинусів

Розглянемо довільний сферичний трикутник АВС. Сферична теорема косинусів аналогічна теоремі косинусів плоскою тригонометрії. Припустимо спочатку, що кожна зі сторін b і з сферичного трикутника АВС менше . Проведемо з точки А дотичні АМ і AN до сторін с і b і знайдемо точки М і N перетину цих дотичних з продовженнями радіусів ОВ і ОС (мал. 11); ці точки перетину існують, так як, за припущенням, кожен з кутів АОС, АОВ менше . Тоді кут А дорівнює куту MAN, і для плоского трикутника MAN чинності плоскою теореми косинусів отримуємо MN 2 = AN 2 + AM 2 - 2AN AM cosA. (1)



Рис. 11

З іншого боку, кути ВОС, АОС та АОВ, які є центральними кутами великих кіл сфери, що спираються на дуги a, b, c, відповідно рівні ,  і . Тому з трикутника OMN знаходимо MN 2 = OM 2 + ON 2 - 2OM ON cos . (2) Порівнюючи (1) і (2), отримуємо OM 2 + ON 2 - 2OM ON cos  = AN 2 + AM 2 - 2AN AM cosA. (3) З прямокутного трикутника ОМА знаходимо, що OM 2 - AM 2 = OA 2, , , (4) а з прямокутного трикутника ONA знаходимо, що ON 2 - AN 2 = OA 2, , , (5)

У силу перших формул (4) і (5) рівність (3) можна переписати у вигляді 2OM ON cos  = 2OA 2 + 2AN AN AM cosA, тобто OM ON cos  = OA 2 + AN AM cosA. (6) Розділивши (6) на твір OM ON, отримаємо  або, в силу других і третіх рівностей (4) і (5),  (7)

Якщо тепер сторона b більше , А сторона з менше , То продовжимо боку а і b нашого трикутника до перетину в точці С ', діаметрально протилежній точці С (мал.32). Тоді в сферичному трикутнику АВС 'боку АС' і АВ, відповідно рівні  і з, менше , А кут ВАС, суміжний з кутом А, дорівнює p - А. Тому в силу формули (7) для трикутника АВС ' , тобто , звідки отримуємо формулу (7).



Рис. 12

Якщо, нарешті, обидві сторони b і з більше , То продовжимо боку b і з нашого трикутника до перетину в точці А ¢, діаметрально протилежній точці А (рис.13). Тоді в сферичному трикутнику А ¢ НД боку СА ¢ та ВА ¢, відповідно рівні pr-b і pr-c, менше , А ÐВА'С дорівнює куту А. Тому в силу формули (7) для трикутника А'ВС , звідки безпосередньо отримуємо формулу (7).



Рис. 13

Формула (7) висловлює сферичну теорему косинусів, яку зазвичай формулюють у наступному вигляді: косинус боку сферичного трикутника дорівнює сумі твори косинусів двох інших сторін і твори синусів двох інших сторін на косинус кута між ними. Замінюючи у формулі (7) позначення сторін а, b, с і кутів А, В, С у круговому порядку, одержуємо дві аналогічні формули  (8) і  (9)

.4 Сферична теорема синусів

Доведемо тепер сферичну теорему синусів, аналогічну теоремі синусів плоскою тригонометрії. З формули (7) випливає рівність.  Застосовуючи це рівність, обчислимо відношення :





Так як отриманий вираз симетрично щодо сторін a, b, c, то воно дорівнює аналогічним виразами, отриманим з лівої частини цієї рівності заміною сторін a, b, c і кутів А, В, С у круговому порядку. Вилучаючи квадратний корінь з цих висловів, отримуємо три рівні вираження:

 (10)

Ця формула і висловлює сферичну теорему синусів: синуси сторін сферичного трикутника відносяться, як синуси протилежних кутів. З формули (10), зокрема видно, що якщо в сферичному трикутнику має місце співвідношення , Так що sinB = sinA, то в силу формули (10) , Тобто або a = b, або . Але якщо a = b, то А = В і відповідно до співвідношення  це дає . Отже, С - полюс боку АВ, і тому . Таким чином, співвідношення  справедливо і в цьому випадку. Отже, якщо , То сторони a і b зв'язані співвідношенням .

3. Застосування сферичної геометрії

.1 Стереографічна сітка Вульфа

Для кількісного розв’язку задач за допомогою стереографічної та гномостереографічної проекцій користуються градусними сітками. Найбільш поширеною є сітка Ю.В. Вульфа (рис. 14). Сітка Вульфа - це стереографічна проекція системи меридіанів і паралельних кіл на площину одного з меридіанів. Отже, вона зображає таку картину, яку можна побачити на площині одного з меридіанів, якщо дивитись на сферичну поверхню з будь-якої точки екватора.



Рис. 14

Сітка Вульфа.Уявімо собі, що спостерігач перебуває в одній з точок екватора сфери, на поверхню якої нанесено систему меридіанів і паралельних кіл. Нехай через точку спостереження проходить лінія меридіана, а на площину, яка перпендикулярна до цього меридіана, спостерігач проектує всі меридіани і паралелі. При цьому лінія екватора і лінія меридіана, що проходить через точку спостереження, спроектуються на площину у вигляді прямих, взаємно перпендикулярних ліній. Проекцію екваторіальної лінії будемо називати горизонтальним діаметром сітки, а проекцію меридіана - вертикальним діаметром. Кінці вертикального діаметра називають верхнім і нижнім полюсами сітки. Точку перетину горизонтального і вертикального діаметрів називають центром сітки.

Проекції всіх інших меридіанів мають вигляд дуг, що проходять через обидва полюси сітки. Проекції меридіанів називають великими кругами, а проекції паралелей - малими кругами сітки. Сітка Вульфа стандартно креслиться на крузі діаметром 0,2 метра, а лінії меридіанів і паралелей, що проектуються як дуги, проводять через 2°. Положення будь-якої точки на сітці Вульфа визначається її координатами ρ та φ; полярні відстані ρ відкладаються від центра сітки вздовж одного із діаметрів. Величина ρ змінюється в межах 0°…180°. У центрі сітки ρ набуває значень 0° та 180°, тобто при віддаленні від центра до зовнішнього кола сітки полярна відстань зростає від 0° до 90° (верхня півсфера), а зворотний хід до центра відповідає зміні ρ від 90° до 180°.

.2 Приклади розв’язання типових задач

Приклад 1. Визначити довжину дуги  паралелі земної кулі ( км) на широті , якщо різниця довгот .

Довжина дуги паралелі визначається за формулою: , де  − радіус малого кола, частиною якого є дуга ;  − різниця довгот (у радіанах) кінців дуги; ; 

Радіус малого кола (1.2):,де  − радіус сфери (у даному випадку - земної кулі);  − широта паралелі. Тоді: \*

Обчислення:

Оскільки величина  має чотири значущі цифри, то інші величини для розрахунку візьмемо з п’ятьма значущими цифрами, а потім результат округлимо до чотирьох, тобто: . Але величина  задана в км, отже:

Відповідь: 672 км.

Приклад 2. Довжина дуги  паралелі земної кулі на широті  дорівнює  км. Визначити довжину дуги екватора  між меридіанами, що проходять через точки  та .

Довжина дуги екватора , що розташована між двома меридіанами, визначається за формулою:

,

де  − радіус земної кулі;

 − різниця довгот (у радіанах).

Різниця довгот:

,

де  − довжина дуги паралелі;

 − широта паралелі.



Обчислення: ;  

Відповідь:  км

Приклад 3. Визначити радіус сфери , якщо площа сферичного трикутника  км2, а його кути:

;  та 

Ш Площа сферичного трикутника визначається за формулою:



де  − радіус сфери (в кілометрах);

 − сферичний надлишок (у радіанах).

Обчислення:



 (в радіанах) 

Відповідь:  км.

Приклад 4.

Визначити найкоротшу відстань (ортодромію) між двома точками (; ) та  (; ), що лежать у північній частині земної кулі (км). Знайти азимут  точки  по відношенню до точки .

Ш Розглянемо сферичний трикутник  (рис. 15).



Рисунок 15

 − полюс;  − екватор;  та  − меридіани, що проходять через точки  та ;  − дуга великого кола, що проходить через точки  та . Дуга  визначає найкоротшу відстань між точками  та .

У цьому трикутнику кути:

;  і , а сторони  та .

Різниця довгот: ; .

Для визначення ортодромії скористуємось формулою косинуса сторони сферичного трикутника:

.

У даному випадку формула набуває вигляду:



;

.

; ;

; ; ;

; ; ;

, ;

 (рад);

 (км).

Обчислення азимуту  проведемо двома способами.

) Азимут  − сферичний кут трикутника . Знайдемо  із розв’язання косокутного сферичного трикутника за двома сторонами та кутом між ними. Для цього скористуємось першою та другою аналогіями Непера для косокутного трикутника, у якого дані дві сторони та кут між ними:

;

.

У даному випадку аналогії набувають вигляд:



;



.

;

Для контролю обчислень використаємо формулу Гауса (4.19):

,

Яка у даному випадку набуває вигляду:

.

Обчислення

; ;

; ;

; ;

; ;



; ;



; ;

 .

Проведемо контроль:

;

.

Відповідь:  км; .

У загальному випадку для обчислення азимуту точки  по відношенню до точки , які задані своїми координатами, необхідно розв’язати косокутний трикутник за двома сторонами та кутом між ними.

) У даному випадку знайти азимут  можна за формулою:

,

де ; ;  (знайдено у першій частині) .





Зауважимо, що розв’язання будь-якої задачі необхідно виконувати безпосередньо за вихідними даними задачі (якщо це можливо) і уникати використання величин, значення яких визначається в процесі розв’язання.

У даному випадку відносна похибка між знайденими величинами азимуту становить %, але другий спосіб набагато коротший та простіший.

) Зважаючи на правила Непера (3.3) і (3.3) для визначення  маємо:

; 

Для визначення кута  маємо:



Для визначення кута  маємо:

.

Звідси невідомі елементи можна визначити за наступними формулами:

. ; 2. ; 3. .

Для катета  із формули (1) одержимо один розв’язок. Для кута  із формули (2) одержимо два значення:  і . Із двох розв’язків згідно (3.2) виберемо таке значення кута , щоб кут  та сторона  були однорідні, тобто . Для кута  за формулою (3) одержимо одне значення.

Для того, щоб трикутник був можливий, необхідно, щоб ,  і  у формулах (1) − (3) були менші одиниці. Для цього необхідно і достатньо, щоб гіпотенуза знаходилась по величині між катетом та доповненням його до .

Дійсно, із  бачимо, що умова  приводить до умови − , а також до умови ; обидві частини нерівності числа додатні, тому, що  і  менші за . Для того щоб ці нерівності існували, необхідно, щоб виконувались нерівності: при , , а при , .

При цих же умовах  і  завжди будуть менші за одиницю.

Формулою для контролю обчислень має бути формула, що пов’язує усі три обчислені елементи ,  та . Такою є третя формула першої групи формул:

; .

Розв’язання:

Дано: 

Проміжні обчислення:



Обчислення невідомих:

; 

;

.

Згідно зі сказаним вище вибираємо кут .

; 

Відповідь:   

) Знаходимо , ,  і 



;



;



; 

; 

; ; 

; .

; 

; 

; 

; 

; 

Відповідь: 

Висновок

геометрія математика сферичний трикутник

Підводячи підсумки виконаної роботи, необхідно відзначити, що в даній роботі вдалося: охарактеризувати специфіку сферичної геометрії як галузі математики на основі історичних фактів, визначити основні поняття сферичної геометрії, розглянути особливості фігур, розташованих на сфері, ознайомитися з головними вченими досліджуваних сферичну геометрію в своїх роботах. Вивчаючи особливості сферичної геометрії, проводилося порівняння з планіметрією і стереометрією. Так само в роботі було ознайомлення, з яких потреб виникла наука - сферична геометрія, її практичне застосування в різних сферах знань. Все це доводить актуальність цього розділу математики в житті людини.

Література

1. Базилєв В.Т. Геометрія. М.: Просвещение, 1975.

. Базилєв В.Т. Збірник завдань з геометрії. М.: Просвещение, 1980. - 240с.

. Перепелкин Д.І. Курс елементарної геометрії. Т.II. М.-Л., Гостехиздат, 1949.

. Погорєлов А.В. Геометрія. - М., Наука. 1984. - 288с.

. Розенфельд Б.А. Історія неевклідової геометрії. Розвиток поняття про геометричний простір. М., Наука., 1976. - 408с.

. Енциклопедія елементарної математики. Кн.4 - Геометрія. М., 1963.