МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ

«ГРОДНЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ЯНКИ КУПАЛЫ»

Факультет математики и информатики

Кафедра высшей математики

Курсовая работа

ЛИНИИ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КВАДРАТИЧНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Буцкевич Наталья Викторовна

Гродно 2012

Оглавление

Введение

Глава 1. Основные понятия и определения

Глава 2. Общая характеристика работы

.1 Точки покоя, прямые равновесия

.2 Первый интеграл

Глава 3. Примеры

Заключение

Список используемой литературы

Введение

Теория дифференциальных уравнений является одним из самых больших разделов современной математики. Основной особенностью дифференциальных уравнений является непосредственная их связь с приложениями. Изучая какое-либо явление, прежде всего, необходимо создать его математическую идеализацию или, другими словами, математическую модель, то есть, пренебрегая второстепенными характеристиками явления, записываются основные законы, управляющие этим явлением, в математической форме. Очень часто законы физики, химии, биологии можно выразить в виде дифференциальных уравнений.

Изучение математической модели математическими методами позволяет не только получить качественные характеристики физических явлений, но и дает возможность проникнуть в суть физических явлений, а иногда предсказать и новые физические эффекты. Математическая модель дает возможность изучать явление в целом, предсказать его развитие, делать количественные оценки изменений, происходящих в нем с течением времени.

Обыкновенные дифференциальные уравнения возникают тогда, когда неизвестная функция зависит лишь от одной независимой переменной. Соотношение между независимой переменной, неизвестной функцией и ее производными до некоторого порядка составляет дифференциальное уравнение. Одними из основных задач являются задачи существования у дифференциальных уравнений таких решений, которые удовлетворяют дополнительным условиям, единственность решения, его устойчивость. Под устойчивостью решения понимают малые изменения решения при малых изменениях данных задачи и функций, определяющих само уравнение. Важными для приложений являются исследование характера решения, или, как говорят, качественного поведения решения.

Важным достижением теории обыкновенных дифференциальных уравнений явилось изучение структурной устойчивости систем. При использовании любой математической модели возникает вопрос о корректности применения математических результатов к реальной действительности. Если результат сильно чувствителен к малейшему изменению модели, то сколь угодно малые изменения модели приведут к модели с совершенно иными свойствами. Такие результаты нельзя распространять на исследуемый реальный процесс, так как при построении модели всегда проводится некоторая идеализация и параметры определяются лишь приближенно.

Глава 1. Основные понятия и определения

Определение 1. Нормальной линейной однородной системой дифференциальных уравнений называется система



или в матричной форме







матрица размерности nЧn.

Определение 2. Системой дифференциальных уравнений порядка М называется система

 (1)

Где  - скалярные функции, зависящие от ,  - непрерывные в области  пространства переменных размерности M+1.

Определение 3. Системы вида (1) называются каноническими, поскольку они разрешены относительно старших производных.

Определение 4. Система уравнений n-го порядка, разрешенных относительно первых производных искомой функции

 (2)

называется нормальной.

Определение 5. Решением системы (1) называется совокупность n функций  определенных на промежутке (a,b) удовлетворяющих следующим условиям:

.  соответственно раз непрерывно дифференцируемы при ;

. Точка  для всех ;

. Для всех ,  удовлетворяет системе (2).

Определение 6. Задачей Каши системы (2) называется задача: найти решение  системы (2), которое при   удовлетворяет начальным условиям .

Определение 7. Общим решением системы



называют семейство функций, зависящее от n произвольных постоянных C1,C2,...,Cn



Так как работа посвящена системам третьего порядка, приведем несколько основных определений.

Определение 8. Нормальной системой третьего порядка называется система

 (3)

Определение 9. Общим решением системы (3) называют семейство функций, зависящее от постоянных 



Теперь рассмотрим систему вида (4)

 (4)

Систему (4) будем называть автономной или динамической нормальной обыкновенной системой третьего порядка.

Пространство  системы (4) называется фазовым пространством. Оно является пространством наибольшей размерности, в котором можно представить поведение траекторий этой системы.

Отражение действительной оси t с помощью решения системы (4) в фазовое пространство  будем называть траекторией.

Решение системы (4) может быть задано в неявной форме

 (5)

Систему (5) будем называть общим интегралом системы (4). Каждое из равенств (5) называется первым интегралом системы (4).

Геометрический смысл: первый интеграл представляет собой семейство поверхностей в фазовом пространстве . Второе и третье уравнение системы (5) также представляют собой семейства поверхностей. Линии пересечения этих поверхностей являются интегральными кривыми системы (4).

Пусть дана функция

 (6)

Для того, чтобы (6) была первым интегралом (4) необходимо и достаточно, чтобы



 называется производной от функции (6) в силу системы (4).

 является обобщением понятия производной по направлению, которое определяет система (4). Геометрически это означает, что траектории системы (4) лежат на поверхностях (6).

Если в (6) зафиксировать , то получим частный первый интеграл системы (4).

Наличие первого интеграла системы (4) позволяет понизить её порядок. Для этого из (6) выразим  и подставим в первые два уравнения системы (4). Получим динамическую систему второго порядка.

Очевидно, траектории этой системы на фазовой плоскости  являются проекциями траекторий системы (4), лежащих на поверхности (6). Проекции на фазовой плоскости топологически эквивалентны траекториям на поверхности (6), т.е. траектории на плоскости дают нам фазовый портрет траекторий, лежащих на поверхности (6).

Фазовые портреты динамических систем в качественной теории дифференциальных уравнений строятся с точностью до гомеоморфизма (взаимно-однозначного непрерывного отображения). Такие портреты называются топологически эквивалентными.

Качественная теория состоит из двух основных разделов:

1. Локальная качественная теория. Её основная задача состоит в изучении поведения траекторий динамической системы в окрестности точки покоя.

. Построение фазового портрета в целом динамической системы.

Основным элементом фазового портрета системы третьего порядка является поведение траекторий этой системы в окрестности точек покоя.

Рассмотрим основные типы точек покоя для системы (3).

Характеристическое уравнение для точки покоя  этой системы представляет собой алгебраическое уравнение третей степени над R.

 (7)



Как известно, уравнение третей степени над полем действительных чисел имеет ровно три корня, если каждый корень считать столько раз, сколько его кратность.

1. Корни уравнения (7) - действительные отрицательные (положительные) числа. Состояние равновесия в этом случае называется устойчивым (неустойчивым) трехмерным узлом и изображено на рис.1.

Рис.1.

. Один из корней - действительный, два других - комплексные, причем все корни имеют отрицательные (положительные) действительные части. Состояние равновесия в этом случае называется устойчивым (неустойчивым) трехмерным фокусом и изображено на рис.2.

Рис.2.

. Один из корней - действительный, два других - комплексные, причем знаки действительного корня и действительных частей двух других - комплексно-сопряженных - разные. Состояние равновесия в этом случае называется трехмерным фокусом и изображено на рис.3.

Рис.3.

. Все корни действительные и разных знаков. Этот случай соответствует двум типам особых точек трехмерное седло, изображенным на рис.4.

Рис.4.

. Один из корней - действительный, два других - комплексные, причем действительная часть комплексно-сопряженного корня ровна нулю. Состояние равновесия в этом случае называется трехмерным центром.

. Один корень равен нулю, а два другие отличны от нуля. В этом семейство интегральных поверхностей представляют собой параллельные плоскости.

. Два корня равны нулю, один отличен от нуля. В этом случае траектории представляют собой прямые.

. Все корни равны нулю. Весь фазовый портрет состоит из точек покоя.

Глава 2. Общая характеристика работы

Как известно, состояния равновесия динамических систем дают основную информацию для построения фазового портрета и поведения траекторий в области определения.

Для систем второго порядка эти состояния представляют собой точки покоя и достаточно хорошо изучены. Линии равновесия у таких систем ведут к сильному вырождению и не представляют особого интереса.

Однако для систем порядка  линии равновесия представляют существенный интерес и не приводят к вырождению этих систем. Еще К. Вейерштрасс указывал на наличие линий равновесия в фазовом пространстве , например, ось вращения трехмерного тела представляет собой линию равновесия. Более того, классическая задача многих тел, сформулированная еще И. Ньютоном, рассматривает, в основном, равновесие решения, которое в частности представляет собой линии равновесия многомерных систем дифференциальных уравнений.

Для автономной системы третьего порядка линии равновесия изучены еще недостаточно, даже для систем с квадратичными нелинейностями. Поэтому в работе для квадратичной системы изучим вопрос о линиях равновесия.

Постановка задачи: Рассмотрим систему:

 (\*)

Исследовать методами качественной теории дифференциальных уравнений, линии равновесия обыкновенной нормальной системы третьего порядка с квадратичными нелинейностями, в её фазовом пространстве.

2.1 Точки покоя, прямые равновесия

Рассмотрим систему (\*) трех дифференциальных уравнений в случае, когда полиномы, стоящие в правой части, зависящие от x, y, z раскладываются в произведение двух линейных множителей, т.е. система (\*) принимает вид:

 (1)

 (2)

где .

В состояниях равновесия правые части дифференциальных уравнений системы (1) обращаются в нуль. Следовательно, имеем систему:





Последняя система будет эквивалентна совокупности следующих 8 систем:

, ,

, ,

, , (3)

, 

 (4)

Геометрически уравнения системы (4) задают 3 плоскости в фазовом пространстве  системы (1). Если у них будет общая прямая, то эта прямая является линией равновесия. Найдем эти условия.

 и одновременно не равных нулю

, ,,  (5)

Это означает, что при выполнении условий (5) система (1) имеет прямую равновесия в ее фазовом пространстве .

Если три плоскости системы (4) совпадают, то система (1) будет иметь целую поверхность равновесия, которая представляет собой плоскость.

Условия совпадения плоскостей системы (4):



и коэффициенты любых двух уравнений плоскостей пропорциональны. (6)

Если условие (5) и (6) не выполняется, то система (4) дает одну изолированную точку покоя или не имеет решений и, следовательно не дает точек покоя.

Уравнение прямой равновесия в параметрической форме будет иметь вид:

, , , 

где  - координаты точки выбранной на прямой произвольным образом.

Используя индексы i, j, k все восемь систем (3) запишем в виде:

 (7)

где, ,,.

Рассуждая аналогично как для системы (4) получим условия существования прямых равновесия системы (1), которые запишем в виде (8).

, , ,  (8)

где  - координаты точки покоя выбранной на прямой равновесия произвольным образом.

Таким образом, будет справедлива следующая теорема:

Теорема 1. При выполнении условий

,,, (9)

 и одновременно не равных нулю система (1) будет иметь четыре прямых равновесия в фазовом пространстве  системы (1).

Рассмотрим систему (4). Она имеет единственное решение если

.

Аналогично все оставшиеся системы из (3) имеют единственное решение если . Если эти решения не совпадают, то система (1) имеет 8 изолированных точек покоя. Если же некоторые из этих точек совпадают, то система имеет сложные (кратные) точки покоя. Пример 3 показывает, что все 8 рассматриваемых систем могут иметь одинаковые решения, которые образуют одну изолированную сложную (восьмикратную) точку покоя.

Теорема 2. Система (1) имеет восемь изолированных точек покоя, если выполняется условие:



где, ,,.

.2 Первый интеграл

Возьмем функцию . Тогда  задает семейство плоскостей

 (10)

Выясним связь между линиями равновесия и существованием первого интеграла.

Теорема 3. Если система (1) имеет первый интеграл , то в фазовом пространстве  системы (1) существует четыре прямые равновесия.

Доказательство. Так как  - есть первый интеграл, то должно выполняться тождество



Откуда выразим  и подставим в систему (1), получим:

 (11)

Для нахождения состояния равновесия системы (1) прировняем правые части системы (11) к нулю.



Данная система будет равносильна совокупности следующих систем:

) , 2) ,

) , 4) .

Решением каждой из этих систем с тремя неизвестными является прямая. Следовательно, эти прямые являются линиями равновесия, что и требовалось доказать.

Справедливо и обратное утверждение:

Если в фазовом пространстве  системы (1) существует четыре прямые равновесия, то система (1) имеет первый интеграл .

Глава 3. Примеры

Пример 1. Рассмотрим систему вида:



П

окажем, что эта система имеет 8 изолированных точек покоя и изучим поведение траекторий в окрестностях этих точек.

Обозначим правые части данной системы



Прировняв правые части системы к нулю получим систему:



Найдем точки покоя (-1,1,0), (-1,-1,0), (-1,1,-2), (-1,3,-2), (0,0,-1), (0,2,-1), (-2,0,-1), (-2,2,-1).

Исследуем эти точки.

Характеристическое уравнение для точки покоя  имеет вид:





Вычислим производные , ,  по x, y, z.

, , ,

, , ,

, , 

. Найдем корни характеристического уравнения в точке (-1,1,0).



,





Решив последнее уравнение получим:

,

.

Точка покоя (-1,1,0) системы (1) имеет два комплексно сопряженных и один действительный корни. Так как , а действительные части двух других корней отрицательные, то точка есть трехмерный неустойчивый фокус.

Аналогично рассмотрим остальные точки покоя.

. Для точки (-1,-1,0) имеем , , .

Точка покоя (-1,-1,0) системы (1) имеет два комплексно сопряженных и один действительный корни. Так как , а действительные части двух других корней положительные, то точка есть трехмерный неустойчивый фокус.

. Для точки (-1,1,-2) имеем.

,

.

Точка покоя (-1,1,-2) системы (1) имеет два комплексно сопряженных и одон действительный корни. Так как , а действительные части двух других корней положительные, то точка есть трехмерный неустойчивый фокус.

. Для точки (-1,3,-2) имеем , , .

Точка покоя (-1,3,-2) системы (1) имеет два комплексно сопряженных и одон действительный корни. Так как , а действительные части двух других корней отрицательные, то точка есть трехмерный неустойчивый фокус.

. Для точки (0,2,-1) имеем , , ,.

Так как точка покоя (0,2-1) системы (1) имеет все корни действительные и разных знаков, то она есть трехмерное седло.

. Для точки (0,0,-1) имеем, ,, .

Точка покоя (0,0,-1) системы (1) имеет два комплексно сопряженных и одон действительный корни. Так как действительные части комплексно сопряженных корней ровны нулю, то точка есть трехмерный центр.

. Для точки (-2,0,-1) имеем, ,,,.

Так как точка покоя (0,2-1) системы (1) имеет все корни действительные и разных знаков, то она есть трехмерное седло.

. Для точки (-2,2,-1) имеем, ,, .

Точка покоя (-2,2,-1) системы (1) имеет два комплексно сопряженных и один действительный корень. Так как действительные части комплексно сопряженных корней ровны нулю, то точка есть трехмерный центр.

Пример 2. Рассмотрим систему вида:

.

Покажем, что эта система имеет 4 прямые равновесия. Прировняем правые части системы к нулю.



Решением последней системы будет совокупность следующих систем:

, , ,

.

. Решим первую систему совокупности. Легко заметить, что первое и вторе уравнения системы линейно зависимы, следовательно, плоскости, которые они задают, совпадают. Значит, решением этой системы будет прямая пересечения плоскостей.



Найдем эту прямую.

, , 

Вычислим, получим

, ,  - уравнение прямой в параметрической форме.

Аналогично, получим следующие прямые:

. Решением 2-й системы будет прямая пересечения плоскостей.



, , , вычислим, получим , , .

3. Решением 3-й системы будет прямая пересечения плоскостей.



Найдем эту прямую , , , вычислим, получим , , .

. Решением 4-й системы будет прямая пересечения плоскостей.



Найдем эту прямую , , , вычислим, получим , , .

Пример 3. Рассмотрим систему вида:



Покажем, что эта система имеет восьмикратную точку покоя.

Прировняв правые части системы к нулю получим систему:



Найдем точку покоя (0,0,0).

Вычислим производные , ,  по x, y, z.

, , ,

, , ,

, , 

Найдем корни характеристического уравнения в точке (0,0,0).

,

.

Решив последнее уравнение, получим: .

Точка покоя (0,0,0) имеет три корня равных нулю. Поведение траекторий требует дальнейших исследований.

Пример 4. Рассмотрим систему вида:

 (1)

где параметры , , , , ,  положительны, , .

Данная система представляет интерес, так как является математической моделью генетических цепей. Исследуем поведение траекторий системы (1) в ее фазовом пространстве  методами качественной теории дифференциальных уравнений.

Состояния равновесия системы (1) найдем из условий:

 (2)

Сделав линейный перенос начала координат, избавимся от свободных членов в правой части системы (1) получим систему:

 (3)

Тогда точки покоя системы (3) найдем из условия:

 (4)

Откуда получаем, что система (3) в ее фазовом пространстве  имеет следующие точки покоя, которые определяются из условий:

) , 2) 

Таким образом, справедливы теоремы:

Теорема 1. Если  - нечетное, то система (3) всегда имеет две точки покоя.

Теорема 2. Если  - четное и

а) , то система (3) всегда имеет три точки покоя;

б) , то система (3) имеет только одну точку покоя .

Следствие. Система (3) не имеет линий и плоскостей равновесия.

Изучим характер точки покоя  системы (3). Для этого составим характеристические уравнение:





Таким образом, справедливы следующие утверждения:

Утверждение 1. Если  и , то  - устойчивый трехмерный узел.

Утверждение 2.Если  и , различных знаков, то  - трехмерное седло.

Утверждение 3.Если  и ,, то  - устойчивый фокус.

Утверждение 4.Если  и , , то  - неустойчивый фокус.

Отметим что при значении параметра  система (3) имеет первый интеграл . Геометрически это означает что все траектории системы (3) лежат на этих плоскостях, которые параллельны оси .

Пример 4.1. Рассмотрим систему (1) в случае  и найдем состояния равновесия этой системы в общем случае:





Таким образом, система (1) при  имеет две точки покоя  и .

Характеристическое уравнение в общем случае для точки имеет вид



Очевидно исследование которого представляет значительные трудности.

Пример 4.2. Найдем состояния равновесия для частного случая системы (1), когда , , , , , , .

 (5)

Система (5) имеет две точки покоя: , .

Составим характеристическое уравнение для точки :



для которого характеристические корни имеют следующий вид:

,

.

Составим характеристическое уравнение для точки :



для которого характеристические корни имеют следующий вид:

,

.

Откуда видно, что состояние равновесия  системы (5) является трехмерным устойчивым фокусом, а состояние равновесия  трехмерным неустойчивым фокусом.

дифференциальный уравнение теорема интеграл

Заключение

В данной работе была исследована обыкновенная нормальная автономная система трех дифференциальных уравнений и траектории этой системы, в её фазовом пространстве, методами качественной теории дифференциальных уравнений.

Найдены условия существования восьми различных точек покоя. Приведены конкретные примеры на существование восьми точек покоя и четырех линий равновесия.

Доказана теорема о существовании четырех линий равновесия, которые представляют собой прямые. Эта теорема представляет связь между первым интегралом и существованием четырех линий равновесия.

Рассмотрена система, которая является математической моделью генетических цепей. Исследовано поведение траекторий этой системы в ее фазовом пространстве  и проведена классификация ее состояний равновесия.

Список используемой литературы

1. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. - М.:Наука, 1967

. Бярозкіна Н.С. Мінюк С.А. Дыферэнцыяльныя і інтэгральныя ўраўненні. Вучэб. дапаможнік для студ. фіз.-мат. і тэхн. спец. выш. навуч. устаноў: У 2т. Т. 1. - Гродна: ГрДУ,2000.

. Бярозкіна Н.С. Мінюк С.А. Дыферэнцыяльныя і інтэгральныя ўраўненні: прыклады і задачы: Вучэб. дапам. - Гродна: ГрДУ,2000.

4. Баутин Н.Н. Леонтович Е.А. Приёмы и методы качественной теории дифференциальных уравнений на плоскости. - М.: Наука, 1991

5. Бутенин Н.В. Неймарк Ю.И. Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. - «Наука»,1976.

. Булгаков В.И. О фазовом портрете одной динамической системы трех дифференциальных уравнений. - В кн.: Актуальные проблемы математики и компьютерного моделирования. - Гродно, 2007

. Булгаков В.И. О точкох покоя одной системы третьего порядка с квадратичными нелинейностями. - В кн.: Актуальные проблемы анализа. Тезисы докладов Международной математической конференции. - Гродно: ГрГУ, 2009

. Булгаков В.И. О фазовом портрете одной квадратичной системы третьего порядка. - В кн.: Научные исследования преподавателей факультета матаматики и информатики. Сборник научных работ. - Гродно, 2010

. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М., 1966г.

. А. Пуанкаре, О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, Гостехиздат, М. - Л., 1947

. Морозов А.Д., Драгунов Т.Н. Визуализация и анализ инвариантных множеств динамических систем. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003

12. Буцкевич, Н.В. О состояниях равновесия одной автономной квадратичной системы третьего порядка / Н.В. Буцкевич // XV Республиканская научная конференция студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях», 26 - 28 марта 2012г., г. Гомель, сб.тез. Докладов. - Гомель, 2012.

. Буцкевич, Н.В. Поведение траекторий полиномиальной динамической системы / Н.В. Буцкевич // Республиканская научная конференция студентов и аспирантов вузов Республики Беларусь «НИРС - 2011», 18 октября 2011 г., г. Минск, сб.тез. Докладов. - Минск, 2011.

. Буцкевич, Н.В. Качественные исследования одной нелинейной системы третьего порядка / Н.В. Буцкевич // Наука-2012: сб науч. ст. / ГрГУ им. Я. Купалы; рекол.: О.В. Янчуревич (отв. ред.) [и др.]. - Гродно: ГрГУ, 2012.