Министерство образования и Науки Российской Федерации

Федеральное Государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Тихоокеанский государственный университет»

Кафедра экономической теории и национальной экономики

Контрольная работа

по дисциплине «Методы исследования и моделирования»

Математическое определение системы и моделей. Теория и методология моделирования

Выполнил студент

Специальность: Национальная экономика

Курс (год обучения): 3 (зу)

Фамилия: Кузмина

Имя: Анна

Отчество: Сергеевна

Хабаровск 2016

1. Понятие моделирования

Любая наука пользуется той или иной абстракцией реальной действительности для того, чтобы выявить общие закономерности различных конкретных явлений. Например, в физике исследуется такая абстракция, как "математический маятник", известный из курса средней школы. Однако конкретными, реальными явлениями, описываемыми одной и той же указанной абстракцией, могут быть:

колебания чугунного шара, подвешенного на тросе крана в Москве для разрушения сносимых строений,

колебания маятника старинных башенных часов в Праге,

колебания маятника Фуко и т.п.

Иными словами, между различными объектами может быть какое-то сходство, которое как раз и позволяет строить абстракции науки.

Если с точки зрения целей исследования между двумя объектами есть сходство, то вместо одного можно исследовать другой. Первый называется оригиналом, а второй - моделью. Модель - это заместитель оригинала, позволяющий изучить некоторые его свойства в определенных условиях. При этом следует подчеркнуть, что сходство может быть не по всем характеристикам: форме, цвету, структуре и т.п. Достаточно, чтобы сходство было лишь в тех свойствах, которые являются объектом данного исследования. Так, например, для изучения распространения волн возмущения от сверхзвукового самолета можно воспользоваться сходством этого явления с распространением волн при движении лодки по поверхности пруда.

Следует особо отметить, что данное определение модели является не только строгим, но и исчерпывающим и продуктивным. Так, например, не существует моделей "вообще" - не предназначенных для каких-либо исследований. Даже детские игрушки предназначены для изучения окружающего мира. Нет таких моделей, которые воспроизводили бы все свойства оригинала. Во-первых, таких свойств бесконечно много и мы бесконечно многие из них даже не представляем себе. А во-вторых, воспроизвести все свойства оригинала в состоянии только сам оригинал - как известно, даже два самолета одного типа Ту-154М различаются весьма существенно. Выбор необходимых для исследования свойств и условий дает возможность на основании предварительного изучения оригинала планомерно строить модель, удовлетворяющую поставленным целям (определенным требованиям точности, широты применения, ответа на поставленные вопросы и т.п.).

. Радиосхема - модель электронной аппаратуры.

. Электронная система автоматического управления - модель действий управляющего оператора (в частности, пилота).

. Глобус - модель земного шара.

Моделирование - это процесс выбора или построения модели для исследования определенных свойств оригинала в определенных условиях. Моделирование - творческий процесс познания, который в первом приближении можно представить

Охарактеризуем основные стадии этого процесса.

Постановка задачи исходит из знаний, полученных в результате наблюдения, изучения объекта, а также из той практической проблемы, которую требуется решить. При этом из всего множества влияющих на объект факторов надо суметь отобрать существенные и определить диапазоны их изменения и особенности влияния на конечный результат. Это - уже искусство, здесь не существует общих приемов и рекомендаций. Кроме того, к этой стадии относится оценка требуемой точности результатов, диктуемая целью исследования.

Под выбором модели понимается не просто подбор из известного заранее множества, а именно синтез, составление общей модели из элементарных "кирпичиков" тех наук, с помощью которых будет исследоваться явление. Здесь действительно серьезным подспорьем является знание определений, логических цепочек и методов соответствующих разделов науки. Однако определяющим для правильности решения конкретной задачи оказывается строгость в использовании этих определений, логических цепочек и методов именно в той области и в тех условиях, где они пригодны! Нарушение такой строгости грозит внутренней несогласованностью отдельных частей модели и, как следствие, ошибочными результатами и выводами.

Проверка адекватности модели - это проверка соответствия результатов, получаемых с помощью модели, реальному поведению исследуемого объекта. На этой стадии проводится исследование и уточнение самой модели в соответствии с поставленной задачей, а также может корректироваться и постановка задачи, и общий подход к восприятию реальной ситуации.

Сутью решения практических прикладных задач является прогноз поведения объекта в различных ситуациях. К построению алгоритма прогнозирования реальной ситуации в других случаях, отличающихся от исследованных во время процесса разработки модели, можно приступать только после завершения всех стадий, описанных выше.

Каждая стадия этого процесса существенна. Пренебрежение любой из них может приводить к неверным выводам по существу решаемой практической задачи в результате таких ошибок, как:

вычисление с недопустимой, неконтролируемой погрешностью;

несоответствие полученных результатов поставленной задаче (полученные результаты могут оказаться решением совсем другой задачи); - неоднозначность решения при невозможности селекции;

неполучение решения (алгоритм расходится или не может завершиться).

Следует подчеркнуть особую значимость при моделировании четкого представления об исследуемых определенных свойствах объекта в определенных условиях, а не всех свойствах и всех условиях! Все свойства во всех условиях может реализовать только сам оригинал. Чем ýже круг моделируемых свойств, условий и уже диапазон значений параметров, тем проще модель и легче добиться ее согласованности и адекватности, тем достовернее результаты и выводы исследования. Поэтому научные методы исследования (в отличие от дилетантского подхода) основываются на замене оригинала моделью в четко оговоренной области свойств и условий, определяемой задачей исследования.

Моделирование - это не только удобный, но в некоторых условиях и необходимый научный прием. Среди таких особых условий можно выделить основные причины, вынуждающие применять моделирование, без которого изучение оригинала невозможно:

сложность или дороговизна натурного исследования (например, в экономике, в экологии),

невозможность натурного исследования по причинам аварийности или бесконечного времени ожидания результатов (например, аварийные ситуации при полетах, астрофизические явления).

Из всего вышесказанного следует, что любая наука представляет собой непрерывный процесс моделирования - творческий процесс познания реальности до такого уровня, который позволяет прогнозировать определенные свойства оригинала в определенных условиях. Учебные дисциплины в этом контексте можно рассматривать в качестве сборников готовых моделей изучаемых явлений и рецептов их применения. 1.2. Классификация моделей

Модели можно рассматривать по отношению к оригиналу в двух аспектах, соответствующих внутренним их устройствам и связям с оригиналом:

характерные особенности выражения свойств оригинала и особенности функционирования модели,

основания для преобразования свойств модели в свойства оригинала.

По характерным особенностям выражения свойств оригинала и особенностям функционирования модели подразделяются на:

логические - построенные на принципах человеческой логики; из которых можно выделить:

образные - дающие наглядное представление (например, образное представление самолета любым человеком),

символьные - использующие символы (геометрические, химические),

образно-символьные - схемы (например, карты, радиосхемы);

материальные - построенные по объективным законам; из которых можно выделить:

функциональные (например, протез коленного сустава),

геометрические (например, самолет-игрушка),

функционально-геометрические (например, модель самолета для исследований в аэродинамической трубе).

Замечание: неспециальный термин "физические модели" можно отнести к некоторым моделям из класса материальных.

Эту классификацию можно изобразить.

особенности выражения свойств оригинала

По основаниям для преобразования свойств модели в свойства оригинала модели подразделяются на (рис. 5):

условные - на основе соглашения (например, система физических единиц измерения, система технической документации);

аналогичные - на основе логического вывода о сходстве (например, производная от функции по времени - это аналог скорости изменения функции);

математические - на основе математического описания.

То, что в средней школе называют "физической" моделью, носит специальное название "математический маятник" и предполагает определенные условности:

масса маятника сосредоточена в точке на конце нити,

нить длинная,

нить нерастяжимая,

нить невесомая,

трение и аэродинамическое сопротивление отсутствуют,

на массу действует единственная внешняя сила - сила тяжести.

) Эту абстракцию можно классифицировать как образную, условную модель реального маятника.

) Из рассмотрения малых углов отклонения маятника от положения равновесия, используя физические и математические рассуждения, можно вывести формулу колебаний и прийти к выводу об их гармоничности: x = Asin(t + 0). Такая модель классифицируется как символьная, математическая.

) Если собрать реальный маятник и использовать его в качестве модели, то это будет геометрическая (или функционально-геометрическая), аналогичная модель.

) Если построить электрический колебательный контур, воспроизводящий реальные колебания, то он будет моделью функциональной, математической.

) Если построить программу для цифровой ЭВМ, рассчитывающую колебания реального маятника, то такая модель тоже функциональная, математическая, с возможным уточнением - дискретная (или цифровая), в отличие от непрерывной (или аналоговой) в предыдущем случае.

Из приведенного примера очевидно, что классификация моделей не может рассматриваться, как жесткая. Ее гибкость допускает некоторые вариации и обнаруживает недостаточность приведенных классов. Поэтому некоторые исследователи предлагали варианты углубления классификации. Однако они носят не универсальный, специфический характер и здесь не рассматриваются

математический модель оригинал адекватность

2. Математические модели и их виды

Существенно важным в теории математического моделирования является постоянное согласование всех аспектов построения модели с задачами и целями исследования. Поэтому сосредоточим внимание на некоторых существенных для исследований особенностях механических систем и процессов. Во-первых, факторы, определяющие такие объекты, характеризуются, как измеримые величины - параметры. Во-вторых, в основе таких моделей лежат уравнения, описывающие фундаментальные законы природы (механики), не нуждающиеся в пересмотре и уточнении. Даже готовые частные модели отдельных явлений, используемые при составлении более общих, хорошо сформулированы и описаны с точки зрения условий и областей применения. В- третьих, наибольшую трудность при разработке моделей механических систем и процессов представляет описание недостоверно известных характеристик объекта, как функциональных, так и числовых. В-четвертых, современные требования к таким моделям приводят к необходимости учета множества факторов, влияющих на поведение объекта, не только таких, которые связаны известными законами природы. Все эти особенности приводят к тому, что модели механических систем и процессов относятся в основном к классу математических.

Математические модели основываются на математическом описании объекта. В математическое описание, прежде всего, входят, и это естественно, взаимосвязи параметров объекта, что характеризует его особенности функционирования. Такие связи могут представляться в виде:

вектор-функций

= f(x,t)

неявных функций

(y,x,t) = 0

обыкновенных дифференциальных уравнений

(x,x',x",...,x(m),t) = 0

дифференциальных уравнений с частными производными

,...) t , , t, , y xy x y F

вычислительного алгоритма,

вероятностного (стохастического) описания.

Первые четыре из указанных видов носят обобщающее название: аналитических зависимостей.

Математическое описание включает в себя не только взаимосвязь элементов и параметров объекта (законы и закономерности), но и полный набор числовых и функциональных данных объекта (характеристики; начальные, граничные, конечные условия; ограничения), а также методы вычисления выходных параметров модели. Т.е. под математическим описанием понимается полная совокупность данных, функций и методов вычисления, позволяющая получать результат.

Со своей стороны в математическую модель может не входить часть математического описания (чаще всего некоторые исходные данные), но помимо него должны присутствовать описания всех допущений, использованных для ее построения, а также алгоритмы перевода исходных и выходных данных с модели на оригинал и обратно

В качестве дополнения к классификации математические модели в зависимости от природы объекта, решаемых задач и применяемых методов, могут различаться следующими видами:

линейные или нелинейные (описываемые функциями, которые содержат основные параметры только в степени 0 и 1, или любыми видами функций),

стационарные или нестационарные (независящие или зависящие от времени),

непрерывные или дискретные,

детерминированные или стохастические (точные, однозначные или вероятностные),

четкие или нечеткие (примеры нечетких множеств: около 10; глубоко или мелко; хорошо или плохо).

Понятие математических моделей объединяет чрезвычайно широкий круг моделей разнообразного вида. Используемая в аэродинамике аппроксимация поляры летательного аппарата может рассматриваться как математическая модель. Это - простейший пример. Но математическими моделями называются и сложные вычислительные комплексы с многочисленным программным обеспечением для моделирования процессов развития экономики. 2ya 0 xaxa c c c

Исторически сложилось так, что под математической моделью иногда подразумевается только один особый вид моделей, содержащих сугубо однозначное прямое математическое описание в виде аналитических зависимостей или вычислительных алгоритмов - т.е. детерминированная математическая модель, с помощью которой при одних и тех же исходных данных можно получить только один и тот же результат. Наибольшее распространение получили детерминированные модели, устанавливающие связь с параметрами оригинала при помощи коэффициентов пропорциональности, всех одновременно равных единице. Используемое такой моделью математическое описание естественно рассматривать как описание непосредственно оригинала - и это верно: у модели и оригинала в этом случае существует одно общее математическое описание. В силу такой кажущейся простоты неискушенный инженер воспринимает и модель уже не как модель, а как оригинал (!). На самом деле такая математическая модель является все же моделью со всеми условностями, абстракциями, предположениями, упрощениями, положенными в ее основу. Возникает желание "упростить" процесс добротного моделирования, что в принципе невозможно, так как модель или соответствует оригиналу, или ее нет вообще. Пренебрежительное отношение к этому провоцирует множество ошибочных выводов в прикладных исследованиях, и полученные результаты не согласуются с реальностью.

Процесс разработки детерминированной математической модели может быть проиллюстрирован нижеследующим подробным примером для определения параметров разбега самолета Ан-2

3. Адекватность математических моделей

Особенностью математических моделей является то, что получение с их помощью каких-либо результатов связано с вычислениями. Так возникает необходимость понятия вычислительного эксперимента. Вычислительный эксперимент - это получение результатов с помощью математической модели для какого-либо конкретного случая исследований. Это может быть как единичный расчет одного параметра, так и комплекс расчетов целого спектра параметров модели во множестве определенным образом связанных условий. Во втором случае большое значение приобретает процедура планирования вычислительного эксперимента (см. раздел 3), целью которого является получение максимума достоверной информации при минимуме затрат. Под достоверностью результата вычислительного эксперимента понимается одновременное выполнение двух условий: во-первых, результат должен быть достаточно точен, а во вторых, не может быть опровергнут с помощью каких либо дополнительных расчетов. (В математической статистике этим понятиям соответствуют понятия несмещенности и состоятельности оценок, При планировании вычислительного эксперимента используются многие методы математического моделирования - от простого здравого смысла до теории катастроф и методов математической статистики.

Определение предельных по условиям бокового выкатывания сочетаний значений скорости бокового ветра и коэффициента сцепления колес шасси с ВПП многодвигательного самолета с двигателями под крылом. Последовательность действий:

выявление критических случаев (например, взлет с отказом критического двигателя в критический момент: при ветре слева критическим является правый крайний двигатель, а критическим моментом является момент достижения скорости принятия решения);

выбор способов нетрадиционного управления самолетом (например, раздельное управление тягой двигателей, включение-выключение управления передним колесом, раздельное торможение);

последовательная аппроксимация линии, представляющей на координатной плоскости исследуемых параметров (скорости бокового ветра и коэффициента сцепления) предельные допустимые сочетания значений, полученных в результате расчетов на множестве критических случаев и способов управления самолетом.

Такую последовательность действий можно рассматривать в качестве плана вычислительного эксперимента

Центральным понятием теории математического моделирования является понятие адекватности. Игнорирование этого понятия низводит теорию до уровня схоластики, а аргументированная проверка адекватности обеспечивает получение добротных и практически значимых результатов.

Адекватность математической модели - это соответствие результатов вычислительного эксперимента поведению реального объекта. Это соответствие следует оценивать с точки зрения целей исследования. Поэтому возможны различные подходы к оценке адекватности различных моделей.

Для выявления этого соответствия для механических систем и процессов, характеризующихся измеримыми величинами - параметрами - необходимо провести сравнение параметров модели и оригинала в одних и тех же условиях. Очевидно, что сравнивать следует лишь соответствующие друг другу параметры между собой и только в той области функционирования объекта, в которой предполагается его исследовать.

Математические модели механических систем и процессов строятся в основном как подобные детерминированные модели, обладающие общим с оригиналом математическим описанием.

Поэтому для адекватности математической модели поведению оригинала - механической системы - достаточно убедиться в выполнении двух свойств: точности и непротиворечивости. Точность в задачах механики означает, что обобщенная характеристика рассогласования соответствующего параметра модели и оригинала (u = u модели - u оригинала) должна быть не больше, чем заранее заданное значение приемлемой погрешности. В качестве такой характеристики может выступать наибольшее по модулю значение рассогласования, среднее значение рассогласования или статистическая оценка, как, например:

доверительный интервал для математического ожидания рассогласования

диапазон практически наблюдаемых значений рассогласования;

интегральная оценка одного из следующих типов:

Однако точность не может быть самоцелью, так как существует множество причин, оправдывающих существование значительных систематических погрешностей, как, например, в летной эксплуатации при нерегистрируемой настройке пилотом начала отсчета угла тангажа. Поэтому критерии проверки точности не должны рассматриваться, как догма, они выбираются в соответствии с целью исследований.

Непротиворечивость подразумевает идентичный характер изменения соответствующих параметров, т.е. идентичный вид основных свойств функциональных зависимостей на отдельных участках, как-то: возрастание, убывание, экстремумы, выпуклость и т.п. При более глубоком рассмотрении этого понятия становится очевидным многообразие возможных критериев проверки непротиворечивости.

Поскольку сравниваемые параметры в области функционирования объекта могут принимать множество различных значений, постольку какие-либо выводы о соответствии их поведения можно сделать только на основании статистической обработки таких множеств. Поэтому адекватность проверяется с помощью статистических критериев, которые могут с определенной вероятностью свидетельствовать о соответствии результатов вычислительного эксперимента поведению реального объекта в соответствующих условиях.

Для образной характеристики понятий точности и непротиворечивости можно воспользоваться рис. 7. На нем изображены графики некоторой функциональной зависимости между параметрами оригинала, которую модель должна адекватно воспроизвести. Для первого знакомства с понятием адекватности нижеследующий анализ приводится в нестрогой форме - строгий математический аппарат проверки адекватности дан в виде алгоритма в § 5.7.

В случае "а" существует область, в которой выполняются некоторые заданные требования точности, т.е. погрешность модели по отношению к оригиналу меньше некоторого допустимого значения. Однако с точки зрения такого свойства рассматриваемой зависимости, как возрастание-убывание, эта модель противоречит поведению оригинала, поэтому не может быть признана адекватной. (Между прочим, если рассмотренное свойство несущественно для данного исследования, то модель может быть признана адекватной.) Случай "б" демонстрирует непротиворечивый ход зависимости с той же точки зрения

На графиках "в" и "г" показано поведение оригинала, наиболее часто встречающееся в реальных механических объектах. Колебания связаны с возмущающими факторами, не поддающимися регистрации, а также с погрешностями записывающей аппаратуры. Тем не менее, заменять экспериментальную зависимость более "красивой" нельзя, так как истинный характер ее неизвестен. В этом случае сравнение оригинала и модели особенно сложно.

В случае "в" заметна систематическая погрешность модели - постоянно присутствующее рассогласование между параметрами модели и оригинала. В этом случае, если все наблюдаемые частные значения рассогласования существенно меньше допустимого значения погрешности, то модель можно считать достаточно точной. Если большое число наблюдаемых частных значений рассогласования больше допустимого значения погрешности, то модель нельзя считать достаточно точной. А в промежуточном случае необходимо руководствоваться соображениями цели исследований В случае "г" систематическая погрешность модели значительно меньше той случайной ее составляющей, которая обязана своим появлением возмущающим факторам. Поэтому, если большинство наблюдаемых частных значений рассогласования меньше допустимого значения погрешности, то модель можно считать достаточно точной.

Что касается свойства непротиворечивости модели в случаях "в" и "г", то этот вопрос значительно сложнее. Если по своей природе исследуемая зависимость должна быть более плавной, чем это зарегистрировано на оригинале (на- пример, скорость полета самолета по времени в пределах 20 с), то это значит, что практически все высокочастотные колебания являются результатом наложения шума (не учитываемых факторов), который следует отфильтровать. Эта не формализуемая процедура должна быть построена только на одном требовании: для непротиворечивости рассогласование между оригиналом и моделью

Список литературы

1. Альсведе Р., Вегенер И. Задачи поиска. - М.: Мир", 1982. - 368 с.

. Барзилович Е.Ю. Оптимально управляемые случайные процессы и их приложения (теоретические основы эксплуатации авиационных систем по состоянию). - Егорьевск: ЕАТК ГА, 1996. - 299 с.

. Белов В.В., Воробьев Е.М., Шаталов В.Е. Теория графов. Учебное пособие для втузов. - М.: Высшая школа, 1976. - 392 с.

. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Том 1. - М.: Наука, 1966. 632 с.

. Бернацкий Ф.И. Планирование экспериментов в инженерных исследованиях. - Владивосток: 1986. - 45 с.

. Бормотов М.Ю., Гуров А.Г., Корунов С.С., Кукушкин С.Н. Экспертные методы прогнозирования. - М.: МАИ, 1985. - 60 с.

. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. - М.: Наука, 1980. - 520 с.

. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. - М.: Наука, 1980. - 208 с.

. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1964. - 576 с.

. Вилисов В.Я. и др. Экспертные методы в АСУ производством и отработкой ЛА. - М.: МАИ, 1984. - 72 с.

. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы (введение в теорию). - М.: Наука, 1973. - 400 с.