РЕФЕРАТ

МАТЕМАТИКА - ЯЗЫК ПОЗНАНИЯ МИРА

ПЛАН

ВВЕДЕНИЕ

ЗАЧЕМ НУЖНЫ МОДЕЛИ?

КАКИЕ БЫВАЮТ МОДЕЛИ

КАК МАТЕМАТИКА ПРОНИКАЕТ В ДРУГИЕ НАУКИ

КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

КАК ВЕДУТСЯ МОДЕЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

ЛИТЕРАТРУА

ВВЕДЕНИЕ

Современный этап развития естествознания характеризуется широким проникновением во все его разделы идей и методов математики. Математика из покрытой ореолом таинственности науки все больше превращается в обычный инструмент исследования, потребность в использовании которого ощущает все большее число специалистов в самых разных областях знания.

Математика была, есть и будет элементом общей культуры. Но если в этом качестве раньше она была уделом небольшого числа посвященных людей, то теперь, особенно с появлением электронных вычислительных машин (ЭВМ), объективные тенденции научно-технического прогресса делают математические методы достоянием широкого круга людей, занятых в самых различных сферах науки и техники.

Чем же вызвана наблюдаемая в последнее время интенсивная математизация человеческого знания?

Вся история развития цивилизации на Земле проникнута идеями числа и измерения. По мере перехода от накопления фактов об окружающей людей природе к организованному знанию точность становилась все более необходимой. Возникла потребность в методах, которые бы обеспечили эту точность при формулировке представлений об окружающем мире. Так возникла математика, так она заняла главенствующее место во всех тех случаях, когда требовалась точность и однозначность суждений.

За несколько тысячелетий существования и совершенствования математикой выработан особый язык абстракций, который позволяет привести к единому виду описание самых разнообразных по своей природе объектов и процессов. Поэтому считается, что любая наука получает ранг “точной” только тогда, когда она в достаточной мере использует эту систему универсальных методов анализа, вырабатывая хорошо развитую систему строгих понятий, позволяющих делать широкие теоретические обобщения и предсказания. На этом пути одним из важнейших этапов, венчающим переход науки в разряд точных является математическое моделирование.

# ЗАЧЕМ НУЖНЫ МОДЕЛИ?

Прежде, чем ответить этот вопрос следовало бы определить, что такое модель. Однако, мы поступим иначе. Сначала приведем несколько примеров, которые помогут сформировать интуитивное представление о понятии “модель”, а уж потом дадим определение.

Архитектор готовится построить здание невиданного доселе типа. Но прежде, чем воздвигнуть его, он сооружает это здание из кубиков на столе, чтобы посмотреть, как оно будет выглядеть. Это модель.

Перед тем как запустить в производство новый самолет, его помещают в аэродинамическую трубу и с помощью соответствующих датчиков определяют величины напряжений, возникающих в различных местах конструкций. Это модель.

Перечислять примеры моделей можно сколь угодно долго. Не будем этого делать, а попытаемся понять какова роль их в уже приведенных примерах.

Конечно, архитектор мог бы построить здание без предварительных экспериментов с кубиками. Но ... он не уверен, что здание будет выглядеть достаточно хорошо. Если оно окажется некрасивым, то многие годы потом оно будет cлужить немым укором своему создателю, лучше уж поэкспериментировать с кубиками.

Конечно, можно запустить самолет в производство и не зная, какие напряжения возникают, скажем, в крыльях. Но... эти напряжения, если они окажутся достаточно большими, вполне могут привести к разрушению самолета. Лучше уж сначала исследовать самолет в аэродинамической трубе.

В приведенных примерах имеет место сопоставление некоторого объекта с другим, его заменяющим: реальное здание - здание из кубиков; серийный самолет - единичный самолет в аэродинамической трубе. И при этом предполагается, что какое-то свойство (свойства) сохраняется при переходе от исходного объекта к его заменяющему, или по крайней мере позволяет судить об исходном свойстве.

Хотя здание из кубиков и много меньше настоящего, но оно позволяет судить о внешнем виде этого здания. Хотя самолет, находящийся в аэродинамической трубе, и не летит, но напряжения, возникающие в его корпусе, соответствуют условиям полета.

После всего сказанного становится понятным такое определение.

*Модель - это такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания (изучения) замещает объект - оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные его черты.*

С незапамятных времен при изучении сложных процессов, явлений, конструировании новых сооружений и т.п. человек применяет модели. Хорошо построенная модель, как правило, доступнее для исследования, нежели реальный объект. Более того, некоторые объекты вообще не могут быть изучены непосредственным образом: недопустимы, например, эксперименты с экономикой страны в познавательных целях; принципиально неосуществимы эксперименты с прошлым или, скажем, с планетами Солнечной системы и т.д.

Другое не менее важное назначение модели состоит в том, что с ее помощью выявляются наиболее существенные факторы, формирующие те или иные свойства объекта, поскольку сама модель отражает лишь некоторые основные характеристики исходного объекта.

Модель позволяет также научиться правильно управлять объектом, апробируя различные варианты управления на модели этого объекта. Экспериментировать в этих целях с реальным объектом в лучшем случае бывает неудобно, а зачастую просто вредно или вообще невозможно в силу ряда причин (большой продолжительности эксперимента во времени, риска привести объект в нежелательное и необратимое состояние и т.п.)

Если объект исследования обладает динамическими характеристиками, т.е. характеристиками, зависящими от времени, особое значение приобретает задача прогнозирования динамики состояния такого объекта под действием различных факторов. При ее решении использование модели также может оказать неоценимую помощь. Итак, резюмируя, можно сказать, что модель нужна:

во-первых, для того чтобы понять, как устроен конкретный объект (процесс), какова его структура, основные свойства, законы развития и взаимодействия с окружающим миром;

во-вторых, для того чтобы научиться управлять объектом (или процессом) и определить наилучшие способы управления при заданных целях и критериях;

в-третьих, для того чтобы прогнозировать прямые и косвенные последствия реализации заданных способов и форм воздействия на объект.

До сих пор мы говорили об использовании моделей в достаточно общих терминах. Конкретизируя эту проблему применительно, например, к биологии, увидим, что перечисленные выше цели, для которых нужны модели, сохраняются. Допустим, что требуется понять, как протекает, скажем, процесс роста дерева. Можно перечислить факторы, определяющие течение этого процесса, но это не дает полного понимания. А вот, если будет показано как, на что и в какой мере воздействуют эти факторы, т.е., если будет создана модель роста дерева, то тогда придет и понимание.

Или допустим, что требуется управлять хемостатом - устройством для культивирования микроорганизмов (регулировать скорость потока, выбирать концентрацию поступающего питательного бульона и т.д.) так, чтобы за некоторое фиксированное время получить на выходе наибольшую массу микробной популяции. Только используя математическую модель хемостата, можно избежать далекого от совершенства метода проб и ошибок.

Очень важно понимать, что одному объекту может сопоставляться не одна, а множество моделей. В связи с этим, естественно возникает вопрос - а какая же из них самая лучшая? Это непростой вопрос, и мы к нему будем неоднократно возвращаться в дальнейшем. Пока лишь отметим, что качество модели определяется ее ролью в проводимом исследовании. Может она дать ответы на вопросы, стоящие перед исследователем - модель хороша. Не может - значит она плоха для данного исследования.

## Хорошая модель, как правило, обладает удивительным свойством: ее изучение дает некоторые новые знания об объекте - оригинале. Это, безусловно, очень важное свойство, играющее притягательную роль для лиц, занимающихся построением и изучением моделей

## КАКИЕ БЫВАЮТ МОДЕЛИ

*Процесс построения модели называется моделированием.* Существует несколько приемов моделирования, которые можно условно объединить в две большие группы: материальное (предметное) и идеальное моделирование.

## К материальным относятся такие способы моделирования, при которых исследование ведется на основе модели, воспроизводящей основные геометрические, физические, динамические и функциональные характеристики изучаемого объекта. Основными разновидностями материального моделирования являются физические и аналоговое моделирование.

## Физическим принято называть моделирование, при котором реальному объекту сопоставляется его увеличенная или уменьшенная копия, допускающая исследование (как правило, в лабораторных условиях) с помощью последующего перенесения свойств изучаемых процессов и явления с модели на объект на основе теории подобия. Вот несколько примеров физических моделей: в астрономии - планетарий, в гидротехнике - лотки с водой, моделирующие реки и водоемы, в архитектуре - макеты зданий, в самолетостроении - модели летательных аппаратов, в экологии - аквариумы с водными организмами, моделирующими водные экосистемы и т.п.

## Аналоговое моделирование основано на аналогии процессов и явлений, имеющих различную физическую природу, но одинаково описываемых формально (одними и теми же математическими уравнениями, логическими схемами, т.п.). Наиболее простой пример - изучение механических колебаний с помощью электрической схемы, описываемой теми же дифференциальными уравнениями.

## Заметим, что в обоих типах материального моделирования модели являлись материальным отражением исходного объекта и были связаны с ним своими геометрическими, физическими и другими характеристиками, причем процесс исследования был тесно связан с материальным воздействием на модель, т.е. состоял в натурном эксперименте с ней. Таким образом, физическое моделирование по своей природе является экспериментальным методом.

## От предметного моделирования принципиально отличается идеальное моделирование, которое основано не на материальной аналогии объекта и модели, а на аналогии идеальной, мыслимой.

## Идеальное моделирование носит теоретический характер. Различают два типа идеального моделирования: интуитивное и знаковое. Под интуитивным понимаем моделирование, основанное на интуитивном представлении об объекте исследования, не поддающемся формализации либо не нуждающемся в ней. В этом смысле, например, жизненный опыт каждого человека может считаться его интуитивной моделью окружающего мира.

## Знаковым называется моделирование, использующее в качестве моделей знаковые преобразования какого-либо вида: схемы, графики, чертежи, формулы, наборы символов и т.д., а также включающее совокупность законов по которым можно оперировать с выбранными знаковыми образованиями и их элементами.

## Важнейшим видом знакового моделирования является математическое моделирование, при котором исследование объекта осуществляется посредством модели сформулированной на языке математики, с использованием тех или иных математических методов.

## Классическим примером математического моделирования является описание и исследование И. Ньютоном основных законов механики средствами математики.

## КАК МАТЕМАТИКА ПРОНИКАЕТ В ДРУГИЕ НАУКИ

## С незапамятных времен человек познает окружающий мир. На заре цивилизации этот процесс шел стихийно. По мере накопления знаний оказалось целесообразным упорядочить их с помощью некоторых структур - так возникли различные науки. В рамках одной науки собирались не какие угодно знания, а лишь те, которые к этой науке относились. Здесь же разрабатывались методы, позволяющие получать новые знания, относящиеся именно к этой науке. Мало того, на место ученых античного мира, которые изучали мир во всем его многообразии, пришли гораздо более узкие специалисты, которые изучают мир с позиций конкретных наук. С течением времени специализация наук достигла такого уровня, науки настолько разошлись в своем развитии, что знания, полученные в одной, зачастую совершенно не понятны в другой. По сути, представители разных наук говорят на различных языках.

## Чем более глубокие факты устанавливаются в современной науке, тем специфичнее делается ее язык, тем сложнее понять его представителям другой науки и, тем более, людям от науки далеким. Такое явление не может не огорчать, так как для многих оно скрывает всеобъемлющую картину мира. По счастью, однако, дело не так уж и безнадежно. Существует, оказывается, такой язык, которым, в той или иной степени, пользуются представители всех наук. Этот язык - математика. Проследим путь, по которому математика проникает в самые разнообразные науки - в биологию и почвоведение, в химию и географию, в геологию и гидрометеорологию, а также многие, многие другие.

## Естественно, развитие любой науки начинается с целенаправленного накопления фактов, сбора информации. Поскольку задача науки состоит в объяснении законов природы, одновременно с накоплением фактов происходит их классификация, систематизация, попытка установления взаимосвязей между объектами и явлениями. На каждом из первых трех этапов, которые вместе могут быть охарактеризованы как описательные, есть место для математики. И не просто место, а важная роль! Накопление фактов можно существенно рационализировать, используя развитый в математике метод планирования эксперимента. Объективная классификация немыслима без современного кластерного анализа, теории распознавания образов. Ну, а при поиске взаимосвязей между изучаемыми объектами или явлениями не обойтись без корреляционного анализа и других методов статистики.

## Регулярно в процессе развития науки возникают ситуации, когда знания, накопленные на описательных этапах развития, позволяют выделить некие главные или определяющие величины. Успешный выбор этих величин чрезвычайно важен для перехода от описательного знания к точному, для создания возможности построения математических моделей различных процессов, явлений. Сколь часто возникают такие ситуации, сказать трудно, так как этап, связанный с поиском определяющих величин, наиболее трудно формализуем и пока да и, по-видимому, в обозримом будущем основан на интуиции ученого.

## Хороший пример важности установления определяющих величин для прогресса науки дает физика. Еще во времена Архимеда фактически были известны основные эмпирические факты, связанные с движением тел. Но потребовалось почти две тысячи лет и гений Ньютона, чтобы установить, что определяющей величиной, связывающей силу и массу, является ускорение, а не скорость, как думали раньше. И только тогда появились законы Ньютона, дающие точные знания о движении тел под действием внешних сил.

## Теперь уже понятно, что этап, венчающий переход науки в разряд точных - математическое моделирование - базируется на “двух китах” : знании определяющих величин и фактов конкретной науки, знании языка и методов математики, позволяющем строить модели. Только наличие обоих типов знаний может позволить ученому продуктивно работать на этом этапе развития науки.

## Какими же математическими знаниями должен владеть современный ученый не математик? Они достаточно обширны. Именно поэтому в этой книге читатель найдет элементы математического анализа и алгебры, теории множеств и дискретной математики, дифференциальных уравнений, теории вероятности и статистики. Изучив их, он познакомится с тем языком на котором пишутся математические модели. Но знакомство, еще не означает подлинного владения языком. В настоящий учебник включен большой набор иллюстративных моделей, которые позволят читателю приобрести опыт построения математических моделей, позволят как бы “заговорить на новом языке”.

## Сделаем одно замечание. Выше мы говорили об этапах развития наук. Важно отметить, что, в связи с относительностью нашего знания, этапы, сменяя друг друга, никогда не заканчиваются, а лишь дополняют друг друга. Сколь бы ни была математизирована та или иная наука, в ней всегда продолжаются и сбор информации, и ее классификация, и поиск связей между наблюдаемыми явлениями.

## КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

## В том случае, когда относительно моделируемого объекта (явления, системы) предполагается, что происходящие в нем процессы детерминированны и средства, используемые при построении модели, также относятся к средствам детерминированного анализа, будем говорить, что и модель относится к классу *детерминированных*.

## Если происходящие в моделируемом объекте процессы имеют случайный (стохастический) характер, а средства, используемые при построении модели, относятся к детерминированному анализу, то такую модель будем относить к классу *детерминированно-стохастических*.

## Если же и процессы в моделируемом объекте, и средства моделирования имеют стохастическую природу, то модель относится к классу *стохастических*.

## Среди стохастических моделей важное место занимает класс *имитационных* моделей. Так называются модели, сопоставляющие объекту (процессу, явлению) алгоритм его функционирования.

## Свой вклад в классификацию вносят и цели моделирования. Если модель нужна, чтобы описать какие-то процессы, явления, то такая модель называется *дескриптивной* (description - описание, англ.).

## Если модель нужна для того, чтобы найти в каком-то смысле наилучший способ управления моделируемым объектом (скажем, определить какой “урожай” следует собирать каждый год с популяции, чтобы максимизировать “урожай” за N лет), то такая модель относится к классу *оптимизационных*.

## Если модель позволяет определить не зависящую от времени характеристику объекта (процесса, явления), то она называется *статической*. В противном случае она называется *динамической*.

## Разумеется, одна и та же модель может входить в разные классы в зависимости от признака, по которому ведется классификация.

## КАК ВЕДУТСЯ МОДЕЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

модель математический детерминированный

## Исходным пунктом такого исследования, его отправной точкой служит некоторая задача из той или иной предметной области (биология, химия, география, геология и др.). Для этой задачи строится математическая модель. Прежде, чем говорить о том, как строится модель, откуда она берется, сделаем два замечания общего порядка.

## Всякий объект (система), модель которой мы создаем, при своем функционировании подчиняется определенным законам - биологическим, физическим, химическим и др. Причем вполне возможно, и это очень важно отметить, что далеко не все эти законы нам на сегодняшний день уже могут быть известны. Мы будем считать, что знание законов предполагает известными количественные соотношения, связывающие те или иные характеристики моделируемого объекта (системы). Можно сказать и иначе, законы формулируются в результате обработки результатов наблюдений за теми или иными характеристиками моделируемого объекта (системы).

## Всякая модель создается для определенной цели - для ответа на некоторое множество вопросов о моделируемом объекте(системе). Иными словами, интересуясь некоторым набором вопросов относительно этого объекта (системы), мы должны взглянуть на этот объект под вполне определенным “углом зрения”. Выбранный “угол зрения” в значительной степени и определяет выбор модели.

## После этих общих замечаний перейдем к описанию процесса построения математической модели некоторого объекта (системы). Его можно представить себе состоящим из следующих этапов:

## . Формируются основные вопросы о поведении системы, ответы на которые мы хотим получить с помощью модели.

## . Из множества законов, управляющих поведением системы, учитываются те, влияние которых существенно при поиске ответов на поставленные вопросы (здесь проявляется искусство модельера).

## . В дополнение к этим законам, если необходимо, для системы в целом или отдельных ее частей формулируются определенные гипотезы о функционировании. Как правило, эти гипотезы правдоподобны в том смысле, что могут быть приведены некоторые теоретические доводы в пользу их принятия. (Здесь проявляется как искусство модельера, так и специалиста по функционированию моделируемой системы).

## . Гипотезы так же, как и законы выражаются в форме определенных математических соотношений, которые объединяются в некоторое формальное описание моделей.

## В последующих главах читатель найдет примеры, иллюстрирующие все выше указанные этапы построения математических моделей.

## Но пусть модель построена. Что делать дальше?

## На следующем этапе разрабатывается или используется созданный раннее алгоритм для анализа этой модели. Если модель и алгоритм не слишком сложны, то может оказаться возможным аналитическое исследование модели. В противном случае составляется программа, реализующая этот алгоритм на ЭВМ. После выполнения расчетов по модели на ЭВМ их результаты обязательно сравниваются с фактической информацией из соответствующей предметной области. Это сравнение необходимо для того, чтобы убедиться в адекватности модели, в том что модельным расчетам можно верить, их можно использовать.

## Если окажется, что результаты расчетов не имеют ничего общего с реальной действительностью, то следует вернуться к построенной модели - быть может, она нуждается в усовершенствовании. Возможны также ошибки в алгоритме и (или) в программе для ЭВМ. Такие повторные просмотры продолжаются до тех пор, пока результаты расчетов не удовлетворяют исследователя. Теперь модель готова к использованию.

## Подводя некоторый итог сказанному, обратим внимание на следующее. Не всякое использование математических формул представляет собой построение математических моделей. В тех случаях, когда существует теория изучаемых явлений, пусть на вербальном уровне, использование формул позволяет построить математический аппарат теории. И только тогда, когда уровень наших знаний в некоторой области еще недостаточен для построения теории, математический формализм приобретает самостоятельное значение и может послужить зародышем будущей теории. При этом новые знания возникают не только из экспериментального изучения реальных явлений, но и с помощью анализа математических формул. Именно в этом случае можно говорить о построении и исследовании математических моделей.

## А в заключение обратим внимание что ни ЭВМ, ни математическая модель, ни алгоритм ее исследования порознь не могут решить достаточно сложную исходную задачу. Только вместе (включая, естественно человека-исследователя) они представляют ту силу, которая позволяет познавать окружающий мир, управлять им в наших интересах.

ЛИТЕРАТРУА

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.П. Вычислительные методы для инженеров. - М.: Мир,2008. - 575 с.

. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.Г. Численные методы. 8-е изд. -М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2010. - 624 с.

. Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978. - 512 с.

. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. - М.: Мир, 2008. - 575.

. Косарев В.И. 12 лекций по вычислительной математике. 2-е изд. - М.: Изд-во МФТИ, 2000. - 224 с.

. Лобанов А.И., Петров И.Б. Вычислительные методы для анализа моделей сложных динамических систем. Часть 1. - М.: МФТИ, 2010. - 168 с.

. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - М.: Наука, 1989. - 608 с.

. Рябенький В.С. Введение в вычислительную математику. - М.: Наука-Физматлит, 1994. - 335 с. 2-е изд. М.: Физматлит, 2010. - 296 с.

. Самарский А.А., Гулин А В. Численные методы. - М.: Наука, 1989.

. Сборник задач для упражнений по курсу Основы вычислительной математики / Под ред. Рябенького В.С. - М.: МФТИ, 1988.

. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. - М.: Изд-во МФТИ, 2004. - 526 с.

. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. - М.: Мир, 1999. - 685 с.

. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. - М.: Мир, 1990. - 512 с.