# **Глава 1. Ортогональные и унитарные матрицы**

# **. Матрица. Определение и свойства**

# **История.**

Впервые матрицы упоминались ещё в древнем Китае, называясь тогда «волшебным квадратом». Основным применением матриц было решение линейных уравнений. Также волшебные квадраты были известны чуть позднее у арабских математиков, примерно тогда появился принцип сложения матриц. После развития теории определителей в конце 17-го века, Габриэль Крамер начал разрабатывать свою теорию в 18-ом столетии и опубликовал «правило Крамера» в 1751 году. Примерно в этом же промежутке времени появился «метод Гаусса». Теория матриц начала своё существование в середине XIX века в работах Уильяма Гамильтона и Артура Кэли. Фундаментальные результаты в теории матриц принадлежат Вейерштрассу, Жордану, Фробениусу. Термин «матрица» ввел Джеймс Сильвестр в 1850 г.

# **Общая информация.**

Маатрица - математический объект, записываемый в виде прямоугольной таблицы элементов кольца или поля (например, целых, действительных или комплексных чисел), которая представляет собой совокупность строк и столбцов, на пересечении которых находятся её элементы. Количество строк и столбцов матрицы задают размер матрицы. Хотя исторически рассматривались, например, треугольные матрицы, в настоящее время говорят исключительно о матрицах прямоугольной формы, так как они являются наиболее удобными и общими.

Матрицы широко применяются в математике для компактной записи систем линейных алгебраических или дифференциальных уравнений. В этом случае, количество строк матрицы соответствует числу уравнений, а количество столбцов - количеству неизвестных. В результате решение систем линейных уравнений сводится к операциям над матрицами.

Для матрицы определены следующие алгебраические операции:

сложение матриц, имеющих один и тот же размер;

умножение матриц подходящего размера (матрицу, имеющую  столбцов, можно умножить справа на матрицу, имеющую  строк);

в том числе умножение на матрицу вектора (по обычному правилу матричного умножения; вектор является в этом смысле частным случаем матрицы);

умножение матрицы на элемент основного кольца или поля (то есть скаляр).

Относительно сложения матрицы образуют абелеву группу; если же рассматривать ещё и умножение на скаляр, то матрицы образуют модуль над соответствующим кольцом (векторное пространство над полем). Множество квадратных матриц замкнуто относительно матричного умножения, поэтому квадратные матрицы одного размера образуют ассоциативное кольцо с единицей относительно матричного сложения и матричного умножения.

Доказано, что каждому линейному оператору, действующему в n-мерном линейном пространстве, можно сопоставить единственную квадратную матрицу порядка n; и обратно - каждой квадратной матрице порядка n может быть сопоставлен единственный линейный оператор, действующий в этом пространстве. Свойства матрицы соответствуют свойствам линейного оператора. В частности, собственные числа матрицы - это собственные числа оператора, отвечающие соответствующим собственным векторам.

**Определение**

Пусть есть два конечных множества  и , где  и  - натуральные числа.

Назовём матрицей размера  (читается  на ) с элементами из некоторого кольца или поля  отображение вида .

называется элементом матрицы, находящимся на пересечении -той строки и -ого столбца;

 -ая строка матрицы состоит из элементов вида , где  пробегает всё множество ;

 -ый столбец матрицы состоит из элементов вида , где  пробегает всё множество .

Если индекс  пробегает множество , а  пробегает множество , то совокупность элементов  полностью определяет матрицу.

Таким образом, матрица размера  состоит в точности из

строк (по  элементов в каждой)

и  столбцов (по  элементов в каждом)

или  элементов.

В соответствии с этим

каждую строку матрицы можно интерпретировать как вектор в -мерном координатном пространстве ;

каждый столбец матрицы - как вектор в -мерном координатном пространстве .

Сама матрица естественным образом интерпретируется как вектор в пространстве , имеющем размерность . Это позволяет ввести покомпонентное сложение матриц и умножение матрицы на число (см. ниже); что касается матричного умножения, то оно существенным образом опирается на прямоугольную структуру матрицы.

Если у матрицы количество строк  совпадает с количеством столбцов , то такая матрица называется квадратной, а число  называется размером квадратной матрицы или её порядком.

# **Обозначения**

Обычно матрицу обозначают заглавной буквой латинского алфавита: пусть,тогда - матрица, которая интерпретируется как прямоугольный массив элементов поля  вида , где

первый индекс означает индекс строки: ;

второй индекс означает индекс столбца: ;

таким образом,  - элемент матрицы , находящийся на пересечении -той строки и -того столбца. В соответствии с этим принято следующее компактное обозначение для матрицы размера :



или просто:



если нужно просто указать обозначение для элементов матрицы.

Иногда, вместо , пишут , чтобы отделить индексы друг от друга и избежать смешения с произведением двух чисел.

Если необходимо дать развёрнутое представление матрицы в виде таблицы, то используют запись вида



Можно встретить как обозначения с круглыми скобками «(…)», так и обозначения с квадратными скобками «[…]». Реже можно встретить обозначения с двойными прямыми линиями "||…||").

Поскольку матрица состоит из строк и столбцов, для них используются следующие обозначения:

это -тая строка матрицы , а

- это -тый столбец матрицы .

Таким образом, матрица обладает двойственным представлением - по строкам:



и по столбцам:

.

Такое представление позволяет формулировать свойства матриц в терминах строк или в терминах столбцов.

# **. Ортогональная матрица и её свойства**

# **Определение.**

Действительная квадратная невырожденная матрица  называется ортогональной, если . Из определения следуют основные свойства ортогональной матрицы .

# **Свойства.**

Квадратная матрица Q называется ортогональной, если QTQ = E. Как мы увидим дальше, ортогональные матрицы задают такие преобразования пространства, которые не изменяют форму геометрических фигур. Поэтому мы должны изучить их свойства подробно.

Свойство 1. Определитель ортогональной матрицы равен ±1, в частности, такая матрица невырождена.

Доказательство. Так как QTQ = E, то |QT| |Q| = |Q|2 = 1. Значит, |Q| = ±1.

Свойство 2. Обратная к ортогональной матрица тоже ортогональна.

Доказательство. Пусть QTQ = E или, что то же самое, Q -1 = QT. Транспонируя обе части, получим: что и означает ортогональность матрицы Q-1.

Свойство 3. Произведение ортогональных матриц - ортогональная матрица.

Доказательство. Пусть Q1, Q2 - ортогональные матрицы.

Так как (Q1Q2)T = Q2TQ1T,то (Q1Q2)T(Q1Q2) = Q2T(Q1T Q1)Q2 = Q2T Q2= E. что и требовалось.

Свойство 4. Матрица Q ортогональна ⇔ сумма квадратов элементов любой строки равна 1, сумма произведений соответствующих элементов любых разных строк равна 0. Аналогичное свойство справедливо и для столбцов.

Доказательство следует из определения и правила умножения матриц. Записывая равенство QTQ = E подробно, например, для матриц 2-го порядка получим:

откуда и следуют требуемые соотношения.

Свойство 5. Матрица Q ортогональна ⇔ линейная замена переменных X = YQ преобразует сумму квадратов (т. е. квадратичную форму) снова в сумму квадратов.

Доказательство. Достаточно вспомнить правило преобразования матрицы квадратичной формы при линейной замене переменных: матрица A преобразуется в матрицу QAQT. Если A = E, (т. е. квадратичная форма является суммой квадратов), то и QAQT = QQT = E.

# **Примеры**

-единичная матрица



- пример матрицы поворота

- пример перестановочной матрицы

**3. Унитарная матрица и её свойства**

# **Определение.**

Комплексная квадратная невырожденная матрица  называется унитарной, если . Следующие свойства унитарной матрицы аналогичны свойствам ортогональной матрицы.

. .

.  - модуль определителя унитарной матрицы равен единице.

. Матрица  является унитарной.

. Произведение двух унитарных матриц одного и того же порядка является унитарной матрицей.

# **Интерпретация**

Унитарная матрица представляет преобразование, переводящее ортонормированный базис комплексного векторного пространства размерности, соответствующей ее размеру, в ортонормированный базис. (Это верно для любого ортонормированного базиса).

Это эквивалентно утверждению, что преобразование, представляемое унитарной матрицей, сохраняет скалярное произведение.

# **Глава 2. Определители (детерминанты) матриц и их свойства. Вырожденные матрицы**

# **. Определение**

Пусть  - квадратная матрица порядка . Определитель (детерминант) квадратной матрицы  - это число , которое ставится в соответствие матрице и вычисляется по ее элементам согласно следующим правилам.

. Определителем матрицы  порядка  называется единственный элемент этой матрицы:.

. Определителем матрицы  порядка  называется число

 (2.1)

где  - определитель квадратной матрицы порядка , полученной из  вычеркиванием первой строки и j-го столбца.

Определитель матрицы обозначают, заключая матрицу в "прямые" скобки:



Имея в виду это обозначение, для краткости говорят о порядке определителя, строках или столбцах определителя, элементах определителя, опуская при этом слово "матрица". Например, первая строка определителя n-го порядка - это первая строка  квадратной матрицы n-го порядка.

Индуктивное определение позволяет вычислить определитель любого порядка. По второму правилу (т.е. по формуле (2.1)) нахождение определителя n-го порядка сводится к вычислению и определителей (n-1)-го порядка. Нахождение каждого определителя (n-1)-го порядка сводится к вычислению  определителя (n-2)-го порядка и т.д., пока не получим  определителей n-го порядка, которые находим по первому правилу. Конечно, такая процедура неудобна из-за своей громоздкости, но вполне реализуема и может быть принята в качестве определения.

Квадратную матрицу, определитель которой равен нулю, называют вырожденной (особой), в противном случае - невырожденной (неособой).

**Другие методы нахождения определителя.**

Метод конденсации Доджсона, основанный на рекурсивной формуле:



где  матрицы, получающиеся из исходной вычёркиванием соответствующих строк и столбцов.

**Свойства определителей.**

· Определитель - кососимметричная полилинейная функция строк (столбцов) матрицы. Полилинейность означает, что определитель линеен по всем строкам (столбцам): , где  и т. д. - строчки матрицы,  - определитель такой матрицы.

· При добавлении к любой строке (столбцу) линейной комбинации других строк (столбцов) определитель не изменится.

· Если две строки (столбца) матрицы совпадают, то её определитель равен нулю.

· Если две (или несколько) строки (столбца) матрицы линейно зависимы, то её определитель равен нулю.

· Если переставить две строки (столбца) матрицы, то её определитель умножается на (-1).

· Общий множитель элементов какой-либо строки определителя можно вынести за знак определителя.

· Если хотя бы одна строка (столбец) матрицы нулевая, то определитель равен нулю.

· Сумма произведений всех элементов любой строки на их алгебраические дополнения равна определителю.

· Сумма произведений всех элементов любого ряда на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю.

· Определитель произведения квадратных матриц одинакового порядка равен произведению их определителей (см. также формулу Бине-Коши).

· С использованием индексной нотации определитель матрицы 3×3 может быть определён с помощью символа Леви-Чивита из соотношения:



· Определитель квадратной матрицы 3\*3 равен ориентированному объему параллелепипеда, три ребра которого заданы векторами-столбцами матрицы.

## **Специальные виды определителей.**

· Определитель Вронского (Вронскиан)

· Определитель Вандермонда

· Определитель Грама

· Определитель Якоби (Якобиан)

· Циркулянт

# **. Нахождение определителей N-го порядка**

ортогональный унитарный матрица полилинейный

**Вычисление определителей 2-го и 3-го порядка.**

Получим формулы вычисления определителей второго и третьего порядков. По определению при 



При вычеркивании первой строки и одного столбца получаем матрицу, содержащую один элемент, поэтому



Подставляя эти значения в правую часть, получаем формулу вычисления определителя второго порядка

(2.2)

Определитель второго порядка равен разности произведения элементов, стоящих на главной диагонали, и произведения элементов, стоящих на побочной диагонали (рис.2.1).



Для определителя третьего порядка имеем



При вычеркивании первой строки и одного столбца получаем определители квадратных матриц второго порядка:



Эти определители второго порядка записываем по формуле (2.2) и получаем формулу вычисления определителя третьего порядка

(2.3)

Определитель (2.3) представляет собой сумму шести слагаемых, каждое из которых есть произведение трех элементов определителя, стоящих в разных строках и разных столбцах. Причем три слагаемых берутся со знаком плюс, а три других - со знаком минус.

Для запоминания формулы (2.3) используется правило треугольников: надо сложить три произведения трех элементов, стоящих на главной диагонали и в вершинах двух треугольников, имеющих сторону, параллельную главной диагонали (рис. 2.2,а), и вычесть три произведения элементов, стоящих на побочной диагонали и в вершинах двух треугольников, имеющих сторону, параллельную побочной диагонали (рис. 2.2,6).



Можно также пользоваться схемой вычисления, изображенной на рис. 2.3 (правило Саррюса): к матрице приписать справа первый и второй столбцы, вычислить произведения элементов, стоящих на каждой из указанных шести прямых, а затем найти алгебраическую сумму этих произведений, при этом произведение элементов на прямых, параллельных главной диагонали, берутся со знаком плюс, а произведение элементов на прямых, параллельных побочной диагонали, - со знаком минус (согласно обозначениям на рис. 2.3).



**Вычисление определителей порядка N>3.**

Итак, получены формулы для вычисления определителей второго и третьего порядков. Можно продолжить вычисления по формуле (2.1) для  и получить формулы для вычисления определителей четвертого, пятого и т.д. порядков. Следовательно, индуктивное определение позволяет вычислить определитель любого порядка. Другое дело, что формулы будут громоздкими и неудобными при практических вычислениях. Поэтому определители высокого порядка (четвертого и более), как правило, вычисляют на основании свойств определителей.

# **Примеры.**

Пример 2.1. Вычислить определители



Решение. По формулам (2.2) и (2.3) находим;





Формула разложения определителя по элементам строки (столбца)

Пусть дана квадратная матрица  порядка .

Дополнительным минором  элемента  называется определитель матрицы порядка , полученной из матрицы  вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическим дополнением  элемента  матрицы  называется дополнительный минор  этого элемента, умноженный на 



Теорема 2.1 формула разложения определителя по элементам строки (столбца). Определитель матрицы  равен сумме произведений элементов произвольной строки (столбца) на их алгебраические дополнения:



(разложение по i-й строке);



(разложение по j-му столбцу).

Замечания 2.1.

. Доказательство формулы проводится методом математической индукции.

. При индуктивном определении (2.1) фактически использована формула разложения определителя по элементам первой строки.

Пример 2.2. Найти определитель матрицы



Решение. Разложим определитель по 3-й строке:



Теперь разложим определитель третьего порядка по последнему столбцу:



Определитель второго порядка вычисляем по формуле (2.2):



Определитель матрицы треугольного вида

Применим формулу разложения для нахождения определителя верхней треугольной матрицы



Разложим определитель по последней строке (по n-й строке):



где  - дополнительный минор элемента . Обозначим . Тогда . Заметим, что при вычеркивании последней строки и последнего столбца определителя , получаем определитель  верхней треугольной матрицы такого же вида, как , но (n-1)-го порядка. Раскладывая определитель , по последней строке ((n-1)-й строке), получаем . Продолжая аналогичным образом и учитывая, что , приходим к формулет.е. определитель верхней треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

Замечания 2.2

. Определитель нижней треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

. Определитель единичной матрицы равен 1.

. Определитель матрицы треугольного вида будем называть определителем треугольного вида. Как показано выше, определитель треугольного вида (определитель верхней или нижней треугольной матрицы, в частности, диагональной) равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

Основные свойства определителей (детерминантов)

. Для любой квадратной матрицы , т.е. при транспонировании определитель не изменяется. Из этого свойства следует, что столбцы и строки определителя "равноправны": любое свойство, верное для столбцов, будет верным для строк.

. Если в определителе один из столбцов нулевой (все элементы столбца равны нулю), то определитель равен нулю:.

. При перестановке двух столбцов определитель меняет знак на противоположный (свойство антисимметричности):



. Если в определителе имеется два одинаковых столбца, то он равен нулю:

 при 

. Если определитель имеет два пропорциональных столбца, то он равен нулю:

при 

. При умножении всех элементов одного столбца определителя на число определитель умножается на это число:



. Если j-й столбец определителя представляется в виде суммы двух столбцов , то определитель равен сумме двух определителей, у которых j-ми столбцами являются  и  соответственно, а остальные столбцы одинаковы:



. Определитель линеен по любому столбцу:



. Определитель не изменится, если к элементам одного столбца прибавить соответствующие элементы другого столбца, умноженные на одно и тоже число:



. Сумма произведений элементов какого-либо столбца определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца равна нулю:

при .

Замечания 2.3

. Первое свойство определителя доказывается по индукции. Доказательства остальных свойств проводятся с использованием формулы разложения определителя по элементам столбца. Например, для доказательства второго свойства достаточно разложить определитель по элементам нулевого столбца (предположим, что j-й столбец нулевой, т.е.  ):



Для доказательства свойства 10 нужно прочитать формулу разложения определителя справа налево, а именно, сумму произведений элементов i-го столбца на алгебраические дополнения элементов j-го столбца представить как разложение по j-му столбцу определителя



у которого на месте элементов j-ro столбца стоят соответствующие элементы i-го столбца. Согласно четвертому свойству такой определитель равен нулю.

. Из первого свойства следует, что все свойства 2-10, сформулированные для столбцов определителя, будут справедливы и для его строк.

. По формулам разложения определителя по элементам строки (столбца) и свойству 10 заключаем, что

(2.4)

. Пусть  - квадратная матрица. Квадратная матрица  того же порядка, что и , называется присоединенной по отношению к , если каждый ее элемент  равен алгебраическому дополнению элемента  матрицы . Иными словами, для нахождения присоединенной матрицы следует:

а) заменить каждый элемент матрицы  его алгебраическим дополнением , при этом получим матрицу ;

б) найти присоединенную матрицу , транспонируя матрицу .

Из формул (2.4) следует, что, где  - единичная матрица того же порядка, что и .

Пример 2.5. Найти определитель блочно-диагональной матрицы , где  - произвольная квадратная матрица,  - единичная, а  - нулевая матрица соответствующего порядка,  - транспонированная.

Решение. Разложим определитель по последнему столбцу. Так как в этом столбце все элементы нулевые, за исключением последнего, равного 1, получим определитель такого же вида, что и исходный, но меньшего порядка. Раскладывая полученный определитель по последнему столбцу, уменьшаем его порядок. Продолжая таким же образом, получаем определитель матрицы . Следовательно,



**Глава 3. Решение задач**

**Задача 1.**

Доказать, что матрица  является ортогональной.

**Решение.**

Найдем произведения



Следовательно, по определению . Вычислим определитель матрицы 

(см. свойство 2).

**Задача 2.**

Дана матрица . Сравнить определитель матрицы  с определителями матриц



**Решение.**

Определитель матрицы  был найден в примере 2.1: . По формуле (2.2) вычисляем определители остальных матриц:

что соответствует свойству 1;

что соответствует свойству 3, так как матрица  получена из матрицы  перестановкой 1-го и 2-го столбцов;



что соответствует свойству 3, так как матрица  получена из матрицы  перестановкой 1-й и 2-й строк;



что соответствует свойству 6, так как матрица  получена из матрицы  умножением элементов 2-й строки на число ;



что соответствует свойству 9, так как матрица  получена из матрицы  прибавлением к элементам первой строки соответствующих элементов второй строки, умноженных на .

**Задача 3.**

Дана матрица . Найти присоединенную матрицу  и вычислить произведения  и .

**Решение.**

Найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы :



Составим присоединенную матрицу, транспонируя матрицу  (см. п.4 замечаний 2.3), т.е.



Вычислим произведения



что соответствует п.4 замечаний 2.3, так как  (см. пример 2.1).

**Задача 4.**

Вычислить определитель 

**Решение.** Выполним следующие преобразования над строками определителя: из второй строки отнимем четыре первых, а из третьей первую строку, умноженную на семь, в результате, согласно свойствам определителя, получим определитель, равный данному.





Определитель равен нулю, так как вторая и третья строки являются пропорциональными.

**Ответ.** 

**Задача 5.**

Найти обратную матрицу к матрице



**Решение.** Вычисляем определитель матрицы:





Так как определитель не равен нулю, то матрица имеет обратную. Обратная матрица  к матрице находится по формуле:



Найдем союзную матрицу , для этого вычислим алгебраические дополнения к элементам матрицы :



















Таким образом, 

Транспонируем эту матрицу (т.е. строки матрицы делаем столбцами с тем же номером):



Итак,



**Ответ.**



**Задача 6.**

Показать, что произведение унитарного оператора на число α тогда и только тогда является унитарным оператором, когда |α|=1.

Определение: Унитарный оператор - ограниченный линейный оператор А : H → H на гильбертовом пространстве H, который удовлетворяет соотношению A\*A=AA\*=I

где A\* - эрмитово-сопряжённый к A оператор, и I : H → H единичный оператор.

Пусть A- унитарная матрица, тогда по определению: A-1 = A\*.

Рассмотрим матрицу α A,, докажем что она унитраная

(α A)-1 = (α A)\*.

Для матрицы αA обратной будет 1/ α\* A-1.

Действительно, αA\*1/ α\* A-1 =α\*1/α\* A\* A-1-1\* A\* A-1 =1\*Е.

α A\*= A\* (§3.1), тогда

А-1 =A\*, т.к. А- унитарная

A-1=А\* => А-1 =A-1 => =  => 1=α.

Пусть α=a+bi, тогда  =a-bi => 1=(a-bi)(a+bi) = a2 - (bi)2 = a2 + b2.

В то же время |α| = √a2+b2 => |α|==1. Что и требовалось доказать.

Тем самым доказали, что если оператор α унитарный, то |α|=1.

Пусть |α|=1. Докажем, что αА - унитарная.

(αА)-1 = А-1 = А\* ( по определению) =  \* A\* =  \*  \* A\*=

= \*A\*= \*A\* =  \*A\* = A\*= (αA)\* (по св. на стр. 10 §3).

Таким образом, (αА)-1 = (αА)\*, что и означает унитарность оператора(матрицы) αА. (Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. 1975. 162с., № 7.3.3).

**Задача 7.**

Показать, что матрица поворота является ортогональной.

Матрица поворота имеет вид А=, тогда нужно доказать, что А-1=АТ (по определению ортогональности).

АТ= |A|= cos2 α + sin2 α = 1.

A11=cos α A21=sin α12=-sin α A22=cos α-1= =AT => матрица поворота ортогональна.

Что и требовалось доказать. (Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. 1975. 162с., № 7.3.5).

**Задача 8.**

Известно, что опреатор проектирования удовлетворяет свойству: р\*=р.

Выясним, будет ли р-1=р\*.

По определению обратного оператора рр-1=Е.

рр-1=Е |\*(p)(слева)

р2р-1=рЕ, т.к. по условию р2=р, то рр-1 = рЕ => E=pE => E=p => p- единичная матрица.

Но для каждого оператора имеется матрица, а для нее всегда можно найти сопряженную => р\* существует. Тогда для операторов проектирования выполняться не будет р-1=р\*. Ортогонально и унитарно быть не может, если исключить рассмотрение тождественных операторов, а тождественные - унитарны.

**Список использованных источников**

1. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. М.: Наука, 1985. 392 с.

. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. 1975. 162с.

. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 2. Основы алгебры: Учебник для вузов. М.:Физико-математическая литература, 2001. 368с.

. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1986. 431 с.

. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Юнимедиастайл, 2002. 475 с.

. Шевцов Г.С. Линейная алгебра. Пермь: ПГУ, 1996. 324 с.

. Шнеперман Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел. 1982.

. Свободная энциклопедия «Википедия». URL: [http://ru.wikipedia.org/wiki/] Дата обращения: 12.02.2015.

# 9. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Учебное пособие

# URL [http://www.chem-astu.ru/chair/study/algebra-geometry/].

# Дата обращения: 12.02.2015.

10. URL [http://www.ngpedia.ru/id216251p1.html].

Дата обращения: 04.04.2015.

11. URL [http://mathhelpplanet.com/static.php?p=ortogonalnye-i-unitarnye-matritsy].

Дата обращения: 04.04.2015.

12. URL [http://www.webpoliteh.ru/subj/agla/144-tema-10-linejnye-operatory-v-evklidovom-unitarnom-prostranstve.html].

Дата обращения: 04.04.2015.

13. URL [http://www.webmath.ru/] Дата обращения: 04.04.2015.