МИНистерство ОБРазования и НАУКИ РОССИи

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

«БРЯНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА И.Г. ПЕТРОВСКОГО»

Физико-математический факультет

Кафедра алгебры и геометрии

Курсовая работа

«Многочлены Чебышева и их основные свойства»

Выполнила:

студентка 3 курса ОЗО ФМФ

направления

«Педагогическое образование»

профиля «Математика»

Ю.М. Симонаева

Научный руководитель:

Кандидат физико-математических наук

М.М. Сорокина

Брянск 2014

Содержание

Введение

Глава 1. Обозначения, определения и известные результаты, используемые в работе

Глава 2. Основы теории многочленов от одной переменной

Глава 3. Многочлены Чебышева и их основные свойства

3.1 Определение и простейшие свойства многочленов Чебышева

3.2 Основные теоремы о многочленах Чебышева

Заключение

Список используемой литературы

Введение

Теория многочленов представляет один из центральных разделов современной алгебры. Понятие многочлена от одной переменной возникло в связи с задачей решения алгебраических уравнений от одной переменной, которой занимались уже в глубокой древности. В XVI веке итальянскими математиками были найдены формулы для решения уравнений третьей и четвертой степени. Позднее Н.Абель и П.Руффини доказали, что, начиная с пятой степени, общей формулы, использующей, кроме сложения и умножения, лишь извлечение корней, не существует, а Э.Галуа открыл закономерности поведения корней, приложимые к каждому конкретному уравнению.

Параллельно с этим К.Гаусс доказал основную теорему алгебры, утверждающую, что всякий многочлен (коэффициенты многочлена могут быть не только вещественными, но и комплексными числами) имеет хотя бы один корень (возможно, являющийся не вещественным, а комплексным числом). В дальнейшем многие ученые занимались изучением многочленов. Я.Бернулли, Э.Безу, У.Горнер, Ж.Лагранж, П.Чебышев, С.Эйзенштейн, Д.Гильберт и многие другие известные математики открыли немало нового и удивительного о многочленах, ставшего впоследствии привычным и обыкновенным.

В XX веке роль многочленов стала меняться. Буквы, входящие в многочлен, стали играть роль символов, не связанную с их конкретными значениями. Современная математика изучает и использует в общем случае многочлены от одной переменной, у которых коэффициенты а0, а1, …, аn являются объектами произвольной природы, а не только числами. Самые разные области математики и ее приложений стали использовать символьное исчисление многочленов, не зависящее от теории функций (математическая логика, топология, теория информации, дискретная и компьютерная математика и т.д.).

С изучением многочленов связан целый ряд преобразований в математике: введение в рассмотрение нуля <http://ru.math.wikia.com/wiki/%D0%9D%D0%BE%D0%BB%D1%8C\_(%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE)?action=edit&redlink=1>, отрицательных <http://ru.math.wikia.com/wiki/%D0%9E%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5\_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE?action=edit&redlink=1>, а затем и комплексных чисел <http://ru.math.wikia.com/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BC%D0%BF%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%BD%D0%BE%D0%B5\_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE>, а также появление теории групп <http://ru.math.wikia.com/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F\_%D0%B3%D1%80%D1%83%D0%BF%D0%BF> как раздела математики и выделение классов специальных функций <http://ru.math.wikia.com/wiki/%D0%A1%D0%BF%D0%B5%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B5\_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8?action=edit&redlink=1> в анализе. Изучение многочленов обогатило математику, позволило расширить понятие числа и доказать основную теорему алгебры.

Среди многочленов от одной переменной важное место занимают многочлены Чебышева. Чебышев Пафнутий Львович - великий русский математик и механик, академик Петербургской Академии наук. В научном наследии П.Л. Чебышева насчитывается более 80 работ. Математические достижения П.Л.Чебышева в основном получены в следующих областях: теория чисел, теория вероятностей, проблема наилучшего приближения функций и общая теория многочленов, теория интегрирования функций. П.Л.Чебышев открыл класс специальных многочленов, носящих его имя и в наши дни. Многочлены Чебышева, Чебышева-Лагерра, Чебышева-Эрмита и их разновидности играют большую роль в математике и в разнообразных приложениях. Чебышевская теория наилучшего приближения функций многочленами находит применение в решении геодезических и картографических задач, в решении алгебраических уравнений. В рассматриваемой теории Чебышева содержатся идеи общей теории ортогональных многочленов.

В курсовой работе изучаются основные положения теории многочленов. Курсовая работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка используемой литературы. Глава 1 носит вспомогательный характер. Здесь приводятся все используемые в работе определения и обозначения. Основное содержание курсовой работы представлено в главах 2 и 3. Глава 2 посвящена изучению основных положений теории многочленов от одной переменной. В главе 3 проводится исследование многочленов Чебышева. Данная глава состоит из 2 разделов. В первом разделе рассматривается определение и изучаются простейшие свойства многочленов Чебышева. Второй раздел посвящен исследованию основных теорем о многочленах Чебышева. Автором курсовой работы изучены и детально изложены центральные результаты о многочленах Чебышева, представленные в книге В.В. Прасолова «Многочлены» [1].

Глава 1. Обозначения, определения и известные результаты, используемые в работе

Определение 1. Бинарной алгебраической операцией на множестве  называется правило или закон, по которому любым двум элементам из , необязательно различным, взятым в указанном порядке, ставится в соответствие единственный элемент из .

Определение бинарной алгебраической операции можно сформулировать также следующим образом.

Определение 1′. Бинарной алгебраической операцией на множестве  называется отображение . Вместо  пишут . Бинарные алгебраические операции в общем виде обозначают символами  и другими.

Определение 2. Непустое множество  с определённой на нём бинарной алгебраической операцией  называется группой, если выполняются следующие аксиомы (аксиомы группы):

) операция  ассоциативна на  , т.е.

;

) в  существует нейтральный элемент относительно операции , т.е.

;

) для каждого элемента из  в  существует симметричный ему элемент относительно операции , т. е. .

Определение 3. Группа  относительно операции  называется абелевой, если операция  коммутативна на , т. е. .

Определение 4. Группа относительно операции сложения называется аддитивной.

Определение 5. Группа относительно операции умножения называется мультипликативной.

Определение 6. Непустое множество  с определенными на нем бинарными алгебраическими операциями сложения и умножения называется кольцом, если выполняются следующие аксиомы (аксиомы кольца):

.  - аддитивная абелева группа, т.е.

а) ассоциативность сложения на 

;

б) ;

в) ;

г) коммутативность сложения на

.

. В  выполняются дистрибутивные законы, т.е. 

а)  - правый дистрибутивный закон,

б)  - левый дистрибутивный закон.

Определение 7. Кольцо  называется ассоциативным, если операция умножения ассоциативна на , т.е. .

Определение 8. Кольцо  называется коммутативным, если операция умножения коммутативна на , т.е. .

Определение 9. Кольцо  называется ассоциативно-коммутатитвным, если  - ассоциативное кольцо и коммутативное кольцо.

Определение 10. Кольцо  называется кольцом с единицей, если в  существует единичный элемент, т.е. .

Определение 11. Элементы  и  кольца  называются делителями нуля, если , но .

Определение 12. Ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля называется областью целостности.

Определение 13. Пусть  - ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Элементы  и  кольца  называются ассоциированными в  и обозначаются , если и .

Определение 14. Пусть  - ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Элемент  называется обратимым в кольце , если в кольце  найдется обратный к нему элемент, т.е. такой элемент , что . Иначе, элемент  называется необратимым элементом .

Определение 15. Полем называется ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей, в котором любой ненулевой элемент обратим.

Определение 15'. Непустое множество  с определёнными на нём бинарными алгебраическими операциями  и  называется полем, если выполняются следующие аксиомы (аксиомы поля):

.  - аддитивная абелева группа, т.е.

а) ассоциативность операции  , т.е.

;

б) ;

в) ;

г) коммутативность операции , т.е. .

. В  выполняются дистрибутивные законы, т.е.

а)  - правый дистрибутивный закон;

б)  - левый дистрибутивный закон.

.  - мультипликативная абелева группа, т.е.

а) ассоциативность операции , т.е.

;

б) ;

в) ;

г) коммутативность операции , т.е. .

Определение 16. Множество  называется числовым, если .

Определение 17. Поле  называется числовым, если оно является числовым множеством, т.е. .

Глава 2. Основы теории многочленов от одной переменной

Определение 1. Пусть  и  - ассоциативно-коммутативные кольца с единицами. Кольцо  называется простым расширением кольца  с помощью элемента , если выполняются следующие условия:

)  - подкольцо кольца ;

) , и записывают .

Определение 2. Простое расширение  называется простым трансцендентным расширением кольца , если выполняется следующее условие:  из равенства  следует, что . Элемент  в этом случае называется трансцендентным элементом над  (относительно ).

Лемма 1. Пусть  - простое трансцендентное расширение ассоциативно-коммутативного кольца  с единицей,. Если

 и

,

то  и .

Лемма 2. Пусть  и  - простые трансцендентные расширения ассоциативно-коммутативных колец  и  с единицами. Если  и  - изоморфизм  на , то , причем существует единственный изоморфизм  кольца  на , который переводит элемент  в элемент  (т.е. ) и продолжает изоморфизм .

Следствие 2.1. Пусть  и  - простое трансцендентное расширение ассоциативно-коммутативного кольца  с единицей. Тогда .

Лемма 3. Пусть  - ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей,  и лишь конечное число . Тогда множество  является ассоциативно-коммутативным кольцом с единицей  относительно операций, заданных по правилу:

1) 

2)  где

и т.д.,



Теорема 1. Пусть  - ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Тогда для  существуют простые трансцендентные расширения, причём любые 2 из них изоморфны.

Замечание. Кольцо , построенное в лемме 3, и являющееся простым трансцендентным расширением кольца  согласно теореме 1, называется кольцом многочленов (полиномов) от одной переменной (неизвестной)  над кольцом  и обозначается . Элементы кольца  называются многочленами (полиномами) над кольцом  от переменной .

Пусть, например, , причём  (ввиду теоремы 1). Тогда  - свободный или постоянный член многочлена , - старший коэффициент многочлена .

Определение 3. Пусть  - ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей,  Число  называется степенью многочлена  и обозначается , т.е.  (степень многочлена - это степень переменной при старшем коэффициенте).

Определение 4. Нулевым многочленом называется многочлен, все коэффициенты которого равны 0, и обозначается 0. По определению полагают, что степень нулевого многочлена равна , т.е. . Таким образом, если , то  (.

Теорема 2. Пусть  - ненулевое ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей, . Тогда:

) ;

)  .

Следствие 2.1. Пусть  - область целостности. Тогда .

Теорема 3. Если  - область целостности, то  - область целостности.

Теорема 4. Пусть  - область целостности. Тогда для  существует поле частных.

Определение 5. Пусть  - ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Говорят, что многочлен  делится на многочлен , если  и обозначается  или .

Простейшие свойства отношения делимости в :

1) рефлексивность ; 

) транзитивность  и ;

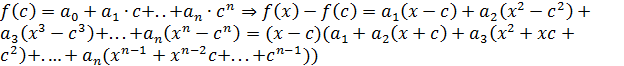
) и ;

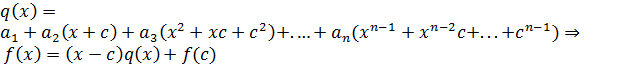
) ;

).

Определение 6. Пусть  - ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей,  (т.е. ), . Элемент  называется значением многочлена  в точке  (на элементе ) и обозначается , то есть .

Теорема 5 (теорема Безу). Пусть  - ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей, , . Тогда существует  такой, что .

Доказательство. Пусть . Тогда .

Таким образом, , где . Теорема доказана.

Определение 7. Пусть  - ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей, . Элемент  называется корнем многочлена , если .

Следствие 5.1. Пусть  - ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей, , . Тогда  - корень  делится на .

Следствие 5.2. При делении многочлена  на  получается остаток , равный .

Теорема 6. Пусть  - область целостности, , . Тогда многочлен  имеет не более  попарно различных корней. Другими словами, любой ненулевой многочлен -й степени над областью целостности имеет не более  попарно различных корней.

Доказательство. Доказательство проведём методом математической индукции по параметру .

) Пусть  не имеет корней, т.е.  имеет нуль корней и значит  - верно.

) Пусть . Предположим, что утверждение верно при .

) Докажем, что утверждение верно при : . Если  не имеет корней, то число корней равно  и  - верно. Пусть  имеет хотя бы один корень и  - корень  такой, что . Тогда по теореме Безу , где , причём  по пункту 2)  имеет не более  попарно различных корней.

Покажем, что все корни многочлена , отличные от , являются также корнями многочлена . Пусть  - корень ,   
, т.е. так как  - область целостности)  - корень . Таким образом, многочлен  имеет корень , а все остальные корни многочлена  являются также корнями многочлена . Так как  имеет не более  попарно различных корней, то многочлен  имеет не более, чем  попарно различных корней.

Из 1)-3) по методу математической индукции следует, что утверждение верно для любого . Теорема доказана.

Следствие 6.1. Пусть  - область целостности, . Если многочлен  имеет более  попарно различных корней, то  является нулевым многочленом.

Определение 8. Пусть , , где  - ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Многочлены  и  называются алгебраически равными, если , .

Определение 9. Многочлены  и  из  называются функционально равными, если , , т.е. значения многочленов  и  в любой точке кольца  совпадают.

Теорема 7. Пусть  - бесконечная область целостности,. Многочлены  и  алгебраически равны  и  равны функционально.

Теорема 8. Пусть  - поле, . Тогда существуют единственные многочлены  такие, что , причем .

Определение 10. Пусть  - поле, . Многочлен  называется наибольшим общим делителем многочленов  и  (или коротко, НОД  и ) и обозначается , если выполняются два условия:

)  - общий делитель многочленов  и , т.е.  и ;

)  делится на любой общий делитель многочленов  и , т.е. если  и , то .

Лемма 4. Пусть  - поле, ,  и . Тогда НОД многочленов  и  и НОД многочленов  и  ассоциированы, т.е. .

Лемма 5. НОД двух многочленов определяется однозначно с точностью до ассоциированности.

Определение 11. Пусть  - поле, . Многочлен  называется наименьшим общим кратным многочленов  и  (или коротко, НОК  и ) и обозначается , если выполняются два условия:

)  - общее кратное многочленов  и , т.е.  и ;

)  делит любое общее кратное многочленов  и , т.е. если  и , то .

Лемма 6. НОК двух многочленов определяется однозначно с точностью до ассоциированности.

Пусть  - поле, . Для нахождения НОК многочленов  и  применяется следующая формула: .

Теорема 9 (теорема о линейном представлении НОД). Пусть  - поле, , , . Тогда .

Определение 12. Пусть  - поле, , . Многочлен вида  называется формальной производной многочлена  и обозначается .

Нетрудно проверить, что формальная производная многочлена удовлетворяет следующим свойствам:

) ;

) ;

) ;

) .

Определение 13. Многочлен  положительной степени над полем  называется неприводимым над, если он не допускает представления в виде произведения двух многочленов над полем  меньшей степени.

Определение 14. Многочлен  положительной степени над полем  называется приводимым над , если он допускает представление в виде произведения двух многочленов над полем  меньшей степени.

Лемма 7. Многочлен первой степени неприводим над любым полем.

Лемма 8. Пусть  - поле,  - неприводимые над  многочлены. Если , то .

Замечание 1. Пусть  - поле. Тогда  - область целостности  - область целостности  все элементы области целостности  подразделяются на 4 вида:

 = 

Замечание 2. Поскольку НОД и НОК многочленов определяются однозначно с точностью до ассоциированности, то многочлены  и  являются взаимно простыми .

Замечание 3. Пусть  - неприводимый над  многочлен. Если , то либо , либо .

Лемма 9. Пусть  - поле, ,  - неприводимый над  многочлен. f  p   и  взаимно просты.

Лемма 10. Пусть  - поле, ,  - неприводимый над  многочлен. Если , то хотя бы  из множителей  делится на , то есть .

Теорема 10. (Основная теорема о многочленах). Любой многочлен положительной степени над полем  допускает представление в виде произведения неприводимых над  многочленов, причем такое представление единственно с точностью до порядка следования множителей и ассоциированности.

Доказательство. 1) Существование. Пусть  и . Доказательство проведем методом математической индукции по параметру .

. Пусть  неприводим над  - искомое представление.

. Допустим, что утверждение верно для любого многочлена положительной степени  над полем .

. Докажем утверждение для многочлена . Если  неприводим над , то  - искомое представление. Пусть  приводим над 

, где  и  и  - представление  и  в виде произведения неприводимых над  многочленов  - искомое представление.

Из 1-3 по методу математической индукции  утверждение верно для любого .

) Единственность. Пусть  и  - требуемые представления . Так как , то либо , либо . Пусть, например, . Так как левая часть  делится на , то  по лемме 4 хотя бы один из множителей делится на . Так как множители можем менять местами, то будем считать, что  по лемме 8  и по замечанию 3 , где  , . Так как левая часть  делится на , то, как и выше, получим  и , где , причем  и т.д., через конечное число шагов получим . Допустим, что  противоречие . Таким образом, представление многочлена  в виде требуемого произведения определяется однозначно с точностью до порядка следования множителей и ассоциированности. Теорема доказана.

Определение 15. Пусть  - поле. Многочлен  называется нормированным или приведенным, если .

Следствие 10.1. Любой многочлен  положительной степени над полем  допускает представление в виде: , где ,  - неприводимые над  нормированные многочлены.

Определение 16. Пусть ,  - поле, . Представление многочлена  в виде , где , - попарно различные неприводимые над полем  нормированные многочлены, , называется каноническим представлением многочлена , число  называется кратностью множителя . Если , то  называется простым неприводимым множителем многочлена .

Определение 17. Пусть ,  - ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей,  - корень . Число  называется кратностью корня  многочлена , если , но .

В этом случае пишут  - данная запись означает, что  - это наибольшая степень , которая делит .

Теорема 11. Пусть  - несократимая рациональная дробь. Если  - корень , то .

Доказательство. Так как  - корень , то , то есть:



. Так как , то . Так как , то .

Теорема доказана.

Следствие 11.1. Рациональные корни нормированного многочлена с целыми коэффициентами являются его целыми корнями.

Следствие 11.2. Целые корни многочлена с целыми коэффициентами являются делителями свободного числа.

Теорема 12. Пусть , ,  - несократимая рациональная дробь. Если  - корень , то , .

Следствие 12.1. Пусть ,  - несократимая рациональная дробь. Если  - корень , то , .

Глава 3. Многочлены Чебышева и их основные свойства

3.1 Определение и простейшие свойства многочленов Чебышева

многочлен чебышев корень переменная

Определение 1. Многочлены , где , определенные рекуррентным соотношением  и начальными условиями  и  называют многочленами Чебышева.

Определение многочленов Чебышева основано на том, что  полиномиально выражается через , т.е. существует такой многочлен , что  при .

Формула  показывает, что многочлены , определенные рекуррентным соотношением  и начальными условиями  и , обладают нужным свойством.

Непосредственно из того, что  при , следует, что  при . А из рекуррентного соотношения следует, что  , где  - целые числа.

Теорема 1. Пусть  - многочлен степени  со старшим коэффициентом 1, причем  при .

Тогда . Другими словами, многочлен  - наименее уклоняющийся от нуля на интервале  многочлен степени  со старшим коэффициентом 1.

Доказательство. Воспользуемся свойством многочлена , а именно тем, что  при . Рассмотрим многочлен . Его степень не превосходит , поскольку старшие члены многочленов  и  равны. Из того, что  при , следует, что в точке

 знак числа  cовпадает со знаком числа . Таким образом, в концах каждого отрезка  многочлен  принимает значения разного знака. Поэтому у многочлена  на этом отрезке есть корень. В случае, когда , либо  - двукратный корень, либо внутри одного из отрезков  и  есть еще один корень. Это следует из того, что в точках  и  мнгочлен  принимает значения одного знака (рис.1).



Рис.1

Количество отрезков  равно , поэтому многочлен  имеет по крайней мере  корней. Для многочлена степени не более  это означает, что он тождественно равен нулю, т.е. . Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть . Тогда



Доказательство. Поскольку , то  и . Следовательно, .

Пусть  и . Тогда  и





Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть  - нечетное простое число. Тогда

.

Доказательство. Запишем  в виде . Тогда



Если , то  делится на . Поэтому

. Следствие доказано.

Определение 2. Композиция многочленов  и  определяется равенством .

Определение 3. Многочлены  и  называются коммутирующими, если , т.е. .

Теорема 3. Многочлены  и  коммутирующие.

Доказательство. Пусть . Тогда  и . Поэтому . Аналогично . Таким образом, равенство  выполняется при  , а значит, это равенство выполняется при всех . Теорема доказана.

Определение 4. Пусть , где  и . Говорят, что пара многочленов  и  эквивалентна паре многочленов и .

Теорема 4 (Ритт). Пустьи  - коммутирующие многочлены. Тогда пара многочленов и  эквивалентна одной из следующих пар:

(1)  игде

(2) игдеи - многочлены Чебышева;

(3) игде



Теорема 4 была доказана в 1922 году американским математиком Риттом; все известные ее доказательства весьма сложные. Современное изложение доказательства теоремы Ритта приведено в книге Прасолова В.В., Шварцмана О.В. [13].

В некоторых случаях вместо многочлена  рассматривают многочлен  со старшим коэффициентом 1. Многочлены  удовлетворяют рекуррентному соотношению . Поэтому  - многочлен с целыми коэффициентами.

Если , то  и . Следовательно, , т.е. многочлен  соответствует полиномиальному выражению величины  через .

С помощью многочленов  можно доказать следующее утверждение.

Теорема 5. Если оба числа и  рациональны, то число  целое, т.е..

Доказательство. Пусть  - несократимая дробь и , где . Тогда . Поэтому  - корень многочлена  с целыми коэффициентами. Пусть  - несократимая дробь. Тогда , и значит,  делится на . Однако числа  взаимно простые. Поэтому , т.е.  - целое число. Теорема доказана.

3.2 Основные теоремы о многочленах Чебышева

Определение 5. Многочлены  называют ортогональными многочленами на отрезке  с весовой функцией  , если и  при .

В пространстве  многочленов степени не более  задают скалярное произведение формулой .

Ортогональные многочлены  образуют ортогональный базис в пространстве  с таким скалярным произведением.

Если задан отрезок и весовая функция, то ортогональные многочлены определены однозначно с точность до пропорциональности. В самом деле, они получаются в результате ортогонализации базиса 

Наиболее известны следующие ортогональные многочлены:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | Название |
| -1 | 1 | 1 | многочлены Лежандра |
| -1 | 1 |  | многочлены Гегенбауэра |
| -1 | 1 |  | многочлены Якоби |
|  |  |  | многочлены Эрмита |
| 0 |  |  | многочлены Лагерра |

Теорема 6. Многочлены Чебышева образуют ортогональную систему многочленов на отрезке  с весовой функцией  .

Доказательство. Сделаем замену . Получим







при . Теорема доказана.

Следствие 2. Если  - многочлен степени  и



при , то , где  - некоторое число.

Доказательство. В пространстве  со скалярным произведением



ортогональное дополнение к подпространству, порожденному многочленами , порождено многочленом Чебышева . Следствие доказано.

Теорема 7. Многочлены Чебышева можно вычислять по формуле

.

Доказательство. Индукцией по  доказывается, что при  , где  - многочлен степени , причем ,  и

 при .

Следовательно,  - многочлен степени .

Проверим, что , т.е.



при . Интегрируя по частям получаем



Первое слагаемое равно нулю, так как  при . Затем интегрируем по частям второе слагаемое и т.д. Чтобы в конце концов получить нуль, необходимо проинтегрировать по частям  раз. При этом на последнем шаге возникнет дифференциал . Это означает, что число  должно быть неотрицательно, т.е. .

Остается проверить, что . Для этого вычисляют . Действительно, что при  рекуррентное соотношение 

принимает вид . Таким образом,

. Кроме того, . Теорема доказана.

Теорема 8. Пусть многочлен , где , таков, что  при . Тогда  при .

Доказательство. Воспользуемся тем, что  при , . Многочлен  полностью определяется значениями .



Где



Дифференцируя  раз соотношение (1), получим



Так как , то



Многочлен  в точке  принимает значение . Поэтому



Кроме того, . Далее, при  знак числа  не зависит от . Действительно, все корни многочлена  принадлежат отрезку . Поэтому все корни многочлена  также принадлежат этому отрезку. Следовательно,  при  и  при .

В итоге при  получаем



В этом случае из неравенства (2) следует, что  Теорема доказана.

Теорема 9. Пусть многочлен , где , таков, что  при . Тогда .

Доказательство. Так как , где , то по теореме 8 при  получим . Теорема доказана.

Теорема 10. При  и при  выполняется неравенство .

Доказательство. Для многочлена  выполняется условие теоремы 8. Поэтому . Теорема доказана.

Теорема 11. При  выполняется неравенство  
.

Доказательство. Пусть . Рассмотрим многочлен . Проверим, что многочлен  удовлетворяет условию теоремы 8, т.е. что  при . При вещественном  функция  зависит только от , причем если , то  монотонно возрастает с возрастанием . Кроме того,

 при . Следовательно, если и , то .

Согласно теореме 8 при  выполняется неравенство , т.е. . Теорема доказана.

Определение 6. Для последовательности функций  рассматривают ряд . Если радиус сходимости данного ряда положителен, то функцию  называют производящей функцией последовательности .

Теорема 12. При  и  выполняются следующие равенства:

(а) 

(б) .

Доказательство.

а) Пусть . Тогда . Поэтому . Кроме того,



при . Следовательно,



Теорема доказана.

б) Продифференцировав по  обе части равенства (а), получим



Следовательно,



Теорема доказана.

Теорема 13. Пусть  и . Тогда



Доказательство. Согласно теореме 12 (а),





Поэтому



Суммирование ведется до тех пор, пока . Поэтому . Теорема доказана.

Для многочлена :



где 

При  выполняется равенство



а при  выполняется равенство



Таким образом, если , а при  многочлены  задаются формулой (1), то выполняется соотношение



где 

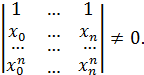
Соотношения (1) и (2) можно записать следующим образом. Пусть  и , где  - некоторое фиксированное число. Тогда



(при  второе соотношение принимает вид ). Покажем, что соотношения (3) эквивалентны не только для указанных последовательностей, но и для произвольных последовательностей. Заметим, что первое соотношение имеет вид , а второе соотношение имеет вид . Поэтому каждое соотношение однозначно определяет как последовательность  по последовательности , так и последовательность  по последовательности . Для последовательностей , , где  и  - фиксированные наборы чисел, соотношения (3) эквивалентны, поскольку они эквивалентны для последовательностей , . Проверим, что для любой последовательности  можно подобрать такие числа  и , что



при . Выберем произвольные попарно различные числа . Тогда для чисел  получим систему линейных уравнений с определителем



Эта система уравнений имеет решение при любых .

Соотношение (3) позволяют получать нетривиальные тождества с биномиальными коэффициентами. Пусть, например,  при всех . Тогда





Данные тождества получаются из разложений  и  по биному Ньютона. В таком случае соотношение 

принимает вид





Заключение

В курсовой работе

ѕ изучены основные понятия теории многочленов от одной переменной (многочлен, степень многочлена, нулевой многочлен, неприводимый (приводимый) над полем многочлен, наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное многочленов над полем, каноническое представление многочлена, корень многочлена, кратность корня многочлена и др.), приведены примеры многочленов (многочлены над числовыми полями), рассмотрены основные свойства многочленов от одной переменной (свойства кольца многочленов над областью целостности, свойства степени многочлена, свойства неприводимых многочленов над полем и др.);

ѕ изучены и детально изложены центральные результаты о многочленах Чебышева: теорема Чебышева о наименее уклоняющемся от нуля на интервале [-1,1] нормированном многочлене, теоремы о вычислении значений многочлена Чебышева, теорема о свойстве коммутирования многочленов Чебышева, теорема об эквивалентных парах многочленов, теорема об ортогональности системы многочленов Чебышева, теоремы о неравенствах для многочленов Чебышева).

Список используемой литературы

1. Прасолов В.В. Многочлены. - М.: МЦНМО, 2001.

2. Винберг Э.Б. Курс алгебры. - М.: МЦНМО, 2011.

. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. - М.: Оникс, 2012.

. Кострикин А.И. Введение в алгебру. В 3-х частях. Часть 1: Основы алгебры: учебник. - М.: МЦНМО, 2009.

. Кострикин А.И. Введение в алгебру. В 3-х частях. Часть 2: Линейная алгебра: учебник. - М.: МЦНМО, 2012.

. Кострикин А.И. Введение в алгебру. В 3-х частях. Часть 3: Основные структуры алгебры: учебник. - М.: МЦНМО, 2009.

. Курош А.Г. Основы высшей алгебры. - СПб.: Лань, 2011.

. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. - СПб.: Лань, 2007.

. Родина М.А., Солодовников А. С. Задачник-практикум по алгебре. - М.: Просвещение, 1986.

. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. - СПб.: Лань, 2007.

. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре. - СПб.: Лань, 2008.

. Окунев Л.Я. Высшая алгебра. - СПб.: Лань, 2009.

. Прасолов В.В., Шварцман О.В. Азбука римановых поверхностей. - М.: Фазис, 1999.