Реферат

Основные типы дифференциальных уравнений первого порядка

1. Уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим уравнение

X(x)dx+Y(y)dy=0, (1)

в котором коэффициент при dx зависит только от x, а коэффициент при dy - только от y. Такое уравнение называется уравнением с разделенными переменными.

Будем предполагать, что функции X(x) и Y(y) непрерывны при всех рассматриваемых значениях x и y. Тогда уравнение (1) можно переписать так

. (2)

Поэтому

. (3)

Это есть общий интеграл уравнения (1). Особых решений нет.

К уравнению с разделенными переменными легко приводится уравнение вида

p1(x)p2(y)dx + q1(x)q2(y)dy = 0

в котором коэффициенты при dx и dy представляют собой произведения функции от x на функцию от y.

Определение 1.: Уравнение вида

P (x, y)dx + Q (x, y)dy = 0 (4)

называется уравнением с разделяющимися переменными, если функции P(x,y) и Q(x,y) можно представить в следующем виде P(x,y) = p1(x)p2(y), Q(x,y) = q1(x)q2(y).

В точках, где p2(y) № 0 и q1(x) № 0, переменные x и y можно отделить друг от друга, разделив обе части уравнения

p1(x)p2(y)dx + q1(x)q2(y)dy = 0

на произведение p2(y)q1(x):

.

Интегрируя, получим общий интеграл уравнения (4):

,

где С - произвольная постоянная.

Замечание. Если уравнение p2(y)q1(x) = 0 допускает решения x = a или y = b, то они, очевидно, являются решениями дифференциального уравнения (4), кроме точек пересечения прямых x = a и y = b, так как в этих точках уравнение (4) не определено. Если эти решения входят в общий интеграл, то каждое из них есть частное решение дифференциального уравнения (4), а если нет, то это особые решения.

Пример 1. Проинтегрировать уравнение .

Разделяя переменные, имеем:

.

Интегрируя почленно, получаем:

 - общий интеграл решения.

Уравнение  имеет решения , которые являются особыми, так как не получаются из общего интеграла ни при каких значениях произвольной постоянной и на каждом из них нарушается единственность решения задачи Коши.

. Однородные дифференциальные уравнения

Определение: Функция двух переменных f(x,y) называется однородной функцией степени однородности m, где m целое, если при любом k выполняется следующее равенство:

f (kx,ky) = kmf (x,y).

Покажем, что всякую однородную функцию нулевой степени можно представить в виде функции отношения . Пусть f (x,y) - однородная функция нулевой степени. Возьмем множитель ; по определению однородности имеем:  и в правой части действительно стоит функция только отношения . Пусть теперь f (x,y) - однородная функция степени m. Очевидно, что функция  будет однородной функцией нулевой степени и по указанному выше можно написать: , откуда

. (5)

Это общий вид однородной функции степени m.

Определение: Однородным уравнением первого порядка называется уравнение вида

P (x,y)dx + Q (x,y)dy = 0 (6)

где P (x,y) и Q (x,y) - однородные функции одной и той же степени однородности.

Решение такого уравнения проводится путем введения новой переменной , с помощью которой уравнение превращается в уравнение с разделяющимися переменными. Действительно, пользуясь формулой (5), можно переписать однородное уравнение в следующем виде:

 (7).

Предположим, что функции P(x,y) и Q(x,y) не содержат общего множителя xk, ибо если бы такой множитель был, то уравнение распалось бы на два: х=0, . В этом случае второе уравнение уже не содержит множителя xk.

Таким образом xm № 0 и можем разделить обе части уравнения (7) на xm:



Полагаем , откуда . Подставляя эти значения в последнее уравнение, имеем:



или

.

Получилось уравнение с разделяющимися переменными, которое решаем, как было указано выше:

,

отсюда



и, потенцируя, получаем: x=CЧw(t), где через w(t) обозначено все выражение, содержащее t в правой части. Заменяя t отношением , получаем окончательный вид общего интеграла:

x = CЧw().

Необходимо учитывать, что при делении на  могут быть потеряны решения.

Интегральные кривые однородного уравнения обладают интересным геометрическим свойством: они все подобны друг другу и центр подобия находится в начале координат.

Пример 2. Решить уравнение .

В приведенных выше обозначениях  обе функции являются однородными функциями второй степени, следовательно, данное уравнение однородное. Вводим новую переменную, полагая y=tx. Тогда dy=tdx+xdt, и уравнение после подстановки имеет вид:



Разделяем переменные:



(так как делим только на x и на сумму квадратов , то потери возможных корней нет); затем, интегрируя, получаем

;

потенцируем



и заменяем t через :

.

Делаем преобразование

,



Рис. 1

После чего становится ясно, что имеем семейство окружностей с центрами в точках  на оси Ox и с радиусами, равными . Все эти окружности касаются оси

Oy в начале координат и подобны друг другу (рис.1).

Рассмотрим уравнение вида

. (8)

Если с1=с=0, то это уравнение однородное, ибо оно приводится к виду (6). Пусть хоть одно из чисел с1, с отлично от нуля и предположим еще, что



Сделаем линейную замену обеих переменных:



Тогда наше уравнение примет вид:



Выбрав α и β так, чтобы



получим однородное уравнение



Интегрируя его и возвращаясь к переменным x и y, найдем общий интеграл уравнения (8).

Если же



то мы имеем , откуда a1=ka, b1=kb. Поэтому уравнение (8) можно переписать в этом случае так:

.

Введя здесь вместо y новую неизвестную функцию z по формуле

z=ax+by,

мы придем к уравнению, не содержащему независимой переменной:

.

Пример 3. Решить уравнение .

Заменяя y’ на  получаем:

.

Введем вместо x и y переменные ξ и η, связанные с x и y линейной зависимостью

x=ξ+α, y=η+β,

вследствие чего dx=dξ, dy=dη. Постоянные α и β надо подобрать так, чтобы множители в уравнении при dξ, dη были однородными функциями первой степени. Для этого надо, чтобы в этих множителях



отсутствовали свободные члены, то есть чтобы было



Из этой системы уравнений находим:  и подставляем их в формулы для x и y: . Заменяя x и y в данном уравнении, используя эти формулы, получаем однородное уравнение в переменных ξ и η:

.

дифференциальный уравнение интеграл бернулли

Решаем это уравнение по правилам решения однородных уравнений, вводя переменную , и получаем общий интеграл: . Возвращаясь от переменных ξ и η к старым переменным x и y, получаем окончательный вид общего решения данного уравнения: .

Пример 4. Решить уравнение .

В этом уравнении коэффициенты при x и y в числителе и знаменателе пропорциональны. Введем новую переменную по формуле x+y=z. Перепишем данное уравнение в виде

(x+y+1)dx+(2x+2y-1)dy=0

и заменим переменные

(z+1)dx+(2z-1)(dz-dx)=0, (dx+dy=dz, dy=dz-dx).

Разделим переменные

(z+1-2z+1)dx+(2z-1)dz=0,

.

Решаем это уравнение и получаем общий интеграл:

.

Возвращаясь к переменным x и y, находим окончательный вид общего интеграла данного уравнения:

.

. Уравнения в полных дифференциалах

Определение: Уравнение вида

P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, (9)

где левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции двух переменных, называется уравнением в полных дифференциалах.

Обозначим эту функцию двух переменных через F(x,y). Тогда уравнение (9) можно переписать в виде dF(x,y) = 0, а это уравнение имеет общее решение F(x,y) = C.

Пусть дано уравнение вида (9). Для того чтобы узнать, является ли оно уравнением в полных дифференциалах, нужно проверить, является ли выражение

P(x,y)dx + Q(x,y)dy (10)

полным дифференциалом некоторой функции двух переменных. Для этого необходимо проверить выполнение равенства

. (11)

Допустим, что для данного выражения (10) равенство (11) выполняется в некоторой односвязной области (S) и, следовательно, выражение (10) является полным дифференциалом некоторой функции F(x,y) в (S).

Рассмотрим следующий способ нахождения этой первообразной. Необходимо найти такую функцию F(x,y), чтобы

 и .

Положим

, (12)

где функция j(у) будет определена ниже. Из формулы (12) тогда следует, что

 (13)

во всех точках области (S). Теперь подберем функцию j(у) так, чтобы имело место равенство

. (14)

Для этого перепишем нужное нам равенство (14), подставив вместо F(x,y) ее выражение по формуле (12):

. (15)

Произведем дифференцирование по у под знаком интеграла (это можно делать так как P(x,y) и  - непрерывные функции двух переменных):

. (16)

Так как по (11) , то, заменяя  на  под знаком интеграла в (16), имеем:

.(17)

Проинтегрировав по у, найдем саму функцию j(у), которая построена так, что выполняется равенство (14). Используя равенства (13) и (14), видим, что

 в области (S). (18)

Пример 5. Проверить, является ли данное дифференциальное уравнение уравнением в полных дифференциалах и решить его .

Это дифференциальное уравнение в полных дифференциалах. В самом деле, обозначая , убеждаемся в том, что

, (19)

а это есть необходимое и достаточное условие того, что выражение

P(x,y)dx+Q(x,y)dy

является полным дифференциалом некоторой функции U(x,y). При этом  - непрерывные в R функции.

Следовательно, чтобы проинтегрировать данное дифференциальное уравнение, нужно найти такую функцию, для которой левая часть дифференциального уравнения будет полным дифференциалом. Пусть такой функцией будет U(x,y), тогда

.

Интегрируя левую и правую части по x, получим:

. (\*)

Чтобы найти φ(y), используем тот факт, что

, т.е.

,

откуда

,

.

Подставляя найденное значение φ(y) в (\*), окончательно получим функцию U(x,y):

,

Общий интеграл исходного уравнения имеет вид

. (20)

Основные типы дифференциальных уравнений первого порядка (продолжение).

. Линейные дифференциальные уравнения

Определение: Линейным уравнением первого порядка называется уравнение вида

y’ + P(x)y = f(x), (21)

где P(x) и f(x) - непрерывные функции.

Название уравнения объясняется тем, что производная y’ - линейная функция от у, то есть если переписать уравнение (21) в виде y’ = - P(x) +f(x), то правая часть содержит у только в первой степени.

Если f(x) = 0, то уравнение

y΄+ P(x)∙y = 0 (22)

называется линейным однородным уравнением. Очевидно, что однородное линейное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными:

y’ +P(x)y = 0; ,

. (22\*)

Если f(x) ≠ 0, то уравнение

y΄+ P(x) y = f(x) (23)

называется линейным неоднородным уравнением.

В общем случае переменные в уравнении (21) разделить нельзя.

Уравнение (21) решается следующим образом: будем искать решение в виде произведения двух функций U(x) и V(x):

y = UЧV. (24)

Найдем производную:

y’ = U’V + UV’ (25)

и подставим эти выражения в уравнение (1):

U’V + UV’ + P(x)UV = f(x).

Сгруппируем слагаемые в левой части:

U’V + U[V’ + P(x)V] = f(x). (26)

Наложим условие на один из множителей (24), а именно, предположим, что функция V(x) такова, что она обращает в тождественный нуль выражение, стоящее в квадратных скобках в (26), т.е. что она является решением дифференциального уравнения

V’ + P(x)V = 0. (27)

Это уравнение с разделяющимися переменными, находим из него V(x):

; ; ;

. (28)

Теперь найдем функцию U(x) такую, чтобы при уже найденной функции V(x) произведение U∙V было решением уравнения (26). Для этого надо, чтобы U(x) была решением уравнения

. (29)

Это уравнение с разделяющимися переменными, поэтому

;

. (30)

Подставляя найденные функции (28) и (30) в формулу (4), получаем общее решение уравнения (21):

. (31)

Таким образом, рассмотренный метод (способ Бернулли) сводит решение линейного уравнения (21) к решению двух уравнений с разделяющимися переменными.

Пример 6. Найти общий интеграл уравнения .

Это уравнение не является линейным относительно y и y’, но оно оказывается линейным, если считать искомой функцией x, а аргументом y. Действительно, переходя к , получаем

, или .

Для решения полученного уравнения воспользуемся способом подстановки (Бернулли). Будем искать решение уравнения в виде x(y)=U(y)V(y), тогда . Получаем уравнение:

, или

. (\*)

Выберем функцию V(y) так, чтобы . Тогда

 или .

Подставляя найденное значение V в (\*), найдем:

.

Тогда  - общее решение дифференциального уравнения.

Другим методом интегрирования линейных уравнений является метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа).

Будем искать решение уравнения (23) в том же виде, что и общее решение (22\*) соответствующего однородного уравнения (22), но будем считать С не постоянной, а некоторой непрерывно дифференцируемой функцией от x, т.е. положим

 (32)

и выберем функцию C(x) так, чтобы (32) удовлетворяло уравнению (21). Подставляем (32) в (21):

,

откуда:

.

Следовательно,

,

где С - произвольная постоянная. Подставляя эти значения C(x) в формулу (32), получим:

.

Это и есть общее решение уравнения (21).

Пример 7. Найти общее решение уравнения .

Применяем метод вариации произвольной постоянной. Решаем сначала уравнение



откуда

.

Ищем общее решение данного неоднородного уравнения в виде  (\*). Находим производную . Подставляем y и y’ в исходное уравнение:

, или

.

Подставляя это значение C(x) в формулу (\*), получим

 - общее решение дифференциального уравнения.

Линейное уравнение (21) не имеет особых решений. Действительно, из самого вывода формулы (32) видно, что в ней содержатся все решения уравнения.

. Дифференциальные уравнения Бернулли

Определение: Уравнение вида y’ + P(x)y = Q(x)ym, где m № 0, m № 1, называется дифференциальным уравнением Бернулли.

Уравнения данного вида подстановкой z = y1-m можно свести к линейному уравнению, однако проще для интегрирования уравнения Бернулли сразу воспользоваться подстановкой y = UV.

Литература

1. С.Я. Казанцева Математика для юридических специальностей. - М. Академия, 2011

2. Атурин В.В. Высшая математика. - М.: Академия, 2010

. Баврин И.И. Высшая математика. - М.: Академия, 2010

. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа. - СПб.: Лань, 2010

. Бирман М.Ш. Избранные труды. - Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2010

. Бурмистрова Е.Б. Математический анализ и дифференциальные уравнения. - М.: Академия, 2010

. Козлов Н.Н. Математический анализ генетического кода. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010

. Олейник О.А. Уравнения с неотрицательной характеристической формой. - М.: Московский университет, 2010

. Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий и ее приложений. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009

. Бычков Ю.А. Хаос в динамических системах. - СПб.: Технолит, 2009

. Ильин А.М. Асимптотические методы в анализе. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009

. Капцов О.В. Методы интегрирования уравнений с частными производными. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009

. Красс М.С. Математика для экономистов. - СПб.: Питер, 2009

. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009