Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

Московский Педагогический Государственный Университет

Математический факультет

Кафедра алгебры

**Курсовая работа**

**На тему: «P-адические числа и операции над ними»**

Выполнила:

Добромыслова Татьяна Леонидовна

курс 1 группа

Научный руководитель:

Кандидат физико-математических наук,

Доцент кафедры алгебры

Фарукшин Владимир Хамзинович

Москва 2014г

Содержание

Введение

. Целые р-адические числа

2. Кольцо целых р-адических чисел

3. Дробные р-адические числа

. Объяснение р-адических чисел с помощью ввода новых математических объектов

. Примеры выполнения арифметических операций над р-адическими числами

Заключение

Список литературы

Введение

В моей курсовой работе цель исследования это - р-адические числа. Для каждого простого p существует нормирование на поле рациональных чисел, пополнение относительно которого называется p-адическими числами. Эти пополнения играют важную роль в теории чисел и смежных областях математики. Моей задачей будет объяснить, что же все-таки р-адические числа и какие операции можно производить над ними. Поскольку в учебниках и энциклопедиях они вводятся таким образом, что непосвящённому очень трудно понять, о чём идёт речь, то я вводя новые математические объекты, условно названные «квазибесконечными числами» и описывая некоторые их свойства, попытаюсь плавно перейти к р-адическим числам, попытаюсь более доступно описать их значимость в теории чисел и смежных математических областях.

1. Целые -адические числа

**Определение:**

пусть - некоторое простое число. Последовательность целых чисел =, обладающих тем свойством,что  для всех n, определяет новый объект,называемый целым -адическим числом.

Сложение и умножение целых p-адических чисел определяется как почленное сложение и умножение таких последовательностей. Для них непосредственно проверяются все аксиомы кольца <http://gruzdoff.ru/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D1%86%D0%BE\_%28%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0%29>. Кольцо целых p-адических чисел обычно обозначается .

Итак, рассмотрим сравнение:



по степеням простого числа 7. При n=1 сравнение имеет два решения:



Положим теперь n=2. Из



cледует  так что решение сравнения второго надо искать в виде  ,где - одно из чисел, определяемых сравнением первым. Теперь найдем решения вида . (при это решения рассматриваются так же).Подставляем это выражение для  во второе сравнение , получаем:



9+6\*+

1+6,

.

Таким образом,получаем решение 

Аналогично при n=3 получаем  и из сравнения



находим т.е.



Этот процесс мы можем продолжать бесконечно.

Мы получим последовательность



Она обладает свойствами:

,

,

.

Итак, процесс построения последовательности

,

,

.

Чем-то напоминает процесс извлечения квадратного корня из 2.

**Например:**

.

В нашем случае строится последовательность целых чисел ,для которых 

Делится на . Такакя аналогия становится более отчетливой,если условиться два целых числа называть близкими ( точнее -близкими, где - некоторое простое число), когда их разность делится на достаточно большую степень  Тогда можно сказать, что квадраты чисел последовательности

,

,

.

При возрастании n становится сколь угодно 7-близкими к 2.

Задание последовательности  определяет вещественное число .

Можно предположить,что наша последовательность так же определяет число a некоторой новой природы, причем такое,что =2.

Если же последовательность рациональных чисел  такова,что  при всех n,то ее пределом так же будет . Все это приводит нас к определению. Две последовательности  и  тогда и только тогда определяютодно и то же целое -адическое число, когда, для всех n

То,что последовательность определяет целое -адическое число a, записывается так 

Множество всех целых -адических чисел мы будем обозначать через . В отличае от целых -адических чисел обычные целые числа будут называться рациональными.

Каждому целому рациональному числу  сопоставим целое -адическое чисело, определяемое последовательностью . Это целое  -адическое число, соответствущее рациональному , мы будем обозначать той же буквой 

Два различных целых рациональных числа  определяют разные целые  -адические числа.

Так и есть, из их равенства как целых -адических чисел следовали бы при всех n сравнения  , что возможно только при . Именно поэтому мы будем рассматривать множество  целых рациональных чисел как часть множества  целых рациональных чисел.

Для лучшего представления укажем способ,при помощи,которого можно из множества всех последовательностей, определяющих данное целое  -адическое число, выбрать одну стандартную.

Пусть целое  -адическое число задается последовательностью 

Обозначим наименьшее неотрицательное число,сравнимое с  по модулю ,через :





Сравнение показывает, что

,

Так что последовательность определяет некоторое целое  -адическое число, и притом в силу   


То же самое, что и последовательность Последовательность, все члены которой удовлетворяют условиям  и 0, будем называть канонической.

Мы доказали,следовательно,что каждое  -адическое число определяется некоторой канонической последовательностью.

Легко видеть,что две разные канонические последовательности определяют разные целые  -адические числа. Действительно, если канонические последовательности и определяют одно и то же целое  -адическое число, то в силу сравнений



И условий 0 получаем что  при всех n

Таким образом, целые  -адические числа находятся во взаимно однозначном соответствии с каноническими последовательностями. Из условия  следует,что 0 и 0 0

Следовательно, всякая каноническая последовательность имеет вид

{,,}, где 0Очевидно, что и, наоборот , каждая последовательность такого вида является канонической последовательностью, определяющей некоторое целое  -адическое число. Исходя из этого легко доказать, что множество канонических последовательностей , а следовательно и множество всех целых  -адических чисел имеют мощность континуума.

. Кольцо целых -адических чисел

**Определение:**

Суммой и произведением целых  -адических чисел  определяемых последовательностями и , называются целые - адические числа, определяемые соответственно последовательностями и .

Чтобы быть уверенным в корректности этого определения,мы должны доказать,что последовательности и определяют некоторые целые - адические числа и что эти числа зависят только от , а не от выбора определяющих их последовательностей. Оба эти свойства доказываются путем очевидной проверки.

Очевидно,что при данном нам определении действий над целыми - адическими числами они образуют коммуникативное кольцо, содержащее кольцо целых рациональных чисел в качестве подкольца.

Делимость целых - адических чисел определяется так же ,как и в любом другом кольце: , если существует такое целое - адическое число  , что 

Для исследования свойств деления важно знать, каковы те целые - адические числа,для которых существуют обратные целые - адические числа. Такие числа называют делителями единицы или единицами. Мы их будем называть - адическими единицами.

**Теорема 1**:

Целое - адическое число  ,определяемое последовательностью , тогда и только тогда является единицей, когда .

**Доказательство**:

Пусть является единицей, тогда существует такое целое - адическое число , что . Если  определяется последовательностью  то условие  означает,что . В частности,  , а значит,  Обратно, пусть  Из условия  легко следует, что , так что . Следовательно, для любого n можно найти такое  , что будет справедливо сравнение . Так как  и , то . Это значит, что последовательность определяет некоторое целое - адическое число  Сравнения  показывают, что , т.е. что  является единицей.

Из доказанной теоремы следует, что целое рациональное число . Будучи рассмотрено как элемент кольца  , тогда и только тогда является единицей, когда  . Если это условие выполнено,то  содержится в . Отсюда следует, что любое целое рациональное b делитсяна такое a в  ,т.е. что любое рациональное число вида b/a, где a и b целые и , содержится в  Рациональные числа такого вида называются -целыми. Они образуют очевидным образом кольцо. Полученный нами результат можно теперь сформулировать так:

**Следствие:**

Кольцо  целых - адических чисел содержит подкольцо, изоморфное кольцу - целых рациональных чисел.

. Дробные p-адические числа

**Определение**:

Дробь вида  ,  , k >= 0 определяет дробное p -адическое число или просто p -адическое число. Две дроби,  и  , определяют одно и тоже p -адическое число, если в .

Совокупность всех p -адических чисел обозначается p. Легко проверить, что операции сложения и умножения продолжаются с p на p и превращают p в поле.

**2.9.Теорема.** Всякое p -адическое число  единственным образом представляется в виде

|  |  |
| --- | --- |
|  | =( 2.8) |

где m - целое число, а  - единица кольца p.

**2.10. Теорема**. Всякое отличное от нуля p -адическое число однозначно представляется в виде



M= .

**Свойства:** Поле p-адических чисел содержит в себе поле рациональных чисел <http://gruzdoff.ru/wiki/%D0%A0%D0%B0%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5\_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE>.Нетрудно доказать, что любое целое p-адическое число некратное p обратимо в кольце  p , а кратное p однозначно записывается в виде , где x не кратно p и поэтому обратимо, а  . Поэтому любой ненулевой элемент поля  p может быть записан в виде , где x не кратно p, а m любое; если m отрицательно, то, исходя из представления целых p-адических чисел в виде последовательности цифр в p-ичной системе счисления, мы можем записать такое p-адическое число в виде последовательности , то есть, формально представить в виде p-ичной дроби с конечным числом цифр после запятой и, возможно, бесконечным числом ненулевых цифр до запятой. Деление таких чисел можно также производить аналогично «школьному» правилу, но начиная с младших, а не старших разрядов числа.

. Объяснение р-адических чисел с помощью ввода новых математических объектов

**Определение**:

«Квазибесконечным числом» (КБЧ) называется бесконечная последовательность цифр (из какой-либо системы счисления, например десятичной), идущая справа налево.

Пример: ...3819248393684028831439284578

Эти числа названы «квазибесконечными», потому что они кажутся бесконечными, но на самом деле не являются таковыми.

**Целые числа.** адическое число деление

Рассмотрим те КБЧ, в которых влево от некоторой позиции идут одни нули, например:

...000000, ...000001, ...000002, ...001936, ...

Нетрудно заметить, что такие числа при сложении и умножении ведут себя как обычные неотрицательные целые числа.

**Целые отрицательные числа.**

Попробуем вычесть из нуля (...00000) единицу (...00001). Формально следуя алгоритму вычитания столбиком с заимствованием из следующего разряда, мы получим ...99999. Снова вычитая единицу, мы получим ...99998, ...99997 и т. д. Нетрудно заметить, что это обычный дополнительный код, широко используемый в компьютерах для представления отрицательных чисел (хотя в компьютерах обычно используется двоичная система, а не десятичная).

Таким образом, чтобы получить −x (т. е. число, которое при сложении с x даёт ...00000), нужно:

) Каждую цифру xi заменить на (N−1)−xi (где N - основание системы счисления)

) К получившемуся числу прибавить ...00001.

Например, в десятичной системе:

−...000000023 = ...999999977

В двоичной системе:

−...000000101 = ...111111011

Таким образом, те КБЧ, в которых влево от некоторой позиции идут одни только наибольшие цифры данной системы счисления, можно отождествить с обычными отрицательными целыми числами.

**Арифметические операции.**

Сумма двух КБЧ вычисляется справа налево по обычному методу сложения столбиком (вычисляется сумма двух цифр очередного разряда, прибавляется единица при наличии переноса из предыдущего разряда, затем определяется цифра суммы данного разряда и наличие переноса в следующий разряд). [В нижеприведённых таблицах наличие переноса обозначается чертой над соответствующей цифрой.] Например:

|  |  |
| --- | --- |
| + | ...204591038205 |
|  | ...436103493293 |
|  | ...640694531498 |

Аналогично вычисляется разность двух КБЧ (только вместо переноса здесь заимствование из следующего разряда).

|  |  |
| --- | --- |
| − | ...204591038205 |
|  | ...436103493293 |
|  | ...768487544912 |

Умножение также вычисляется по обычном методу умножения столбиком, как сумма бесконечного ряда слагаемых.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | | | | | | | | | × | ... | | 2 | 0 | 4 | 5 | 9 | 1 | 0 | 3 | 8 | 2 | 0 | 5 |
|  | | | | | | | | | |  | ... | | 4 | 3 | 6 | 1 | 0 | 3 | 4 | 9 | 3 | 2 | 9 | 3 |
|  | | | | | | | | | | | ... | | 6 | 1 | 3 | 7 | 7 | 3 | 1 | 1 | 4 | 6 | 1 | 5 |
|  | | | | | | | | | | ... | | 8 | 4 | 1 | 3 | 1 | 9 | 3 | 4 | 3 | 8 | 4 | 5 |  |
|  | | | | | | | | | ... | | 4 | 0 | 9 | 1 | 8 | 2 | 0 | 7 | 6 | 4 | 1 | 0 |  |  |
|  | | | | | | | | ... | | 6 | 1 | 3 | 7 | 7 | 3 | 1 | 1 | 4 | 6 | 1 | 5 |  |  |  |
|  | | | | | | | ... | | 8 | 4 | 1 | 3 | 1 | 9 | 3 | 4 | 3 | 8 | 4 | 5 |  |  |  |  |
|  | | | | | | ... | | 8 | 1 | 8 | 3 | 6 | 4 | 1 | 5 | 2 | 8 | 2 | 0 |  |  |  |  |  |
|  | | | | | ... | | 6 | 1 | 3 | 7 | 7 | 3 | 1 | 1 | 4 | 6 | 1 | 5 |  |  |  |  |  |  |
|  | | | | ... | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |
|  | | | ... | | 2 | 0 | 4 | 5 | 9 | 1 | 0 | 3 | 8 | 2 | 0 | 5 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | | ... | | 2 | 2 | 7 | 5 | 4 | 6 | 2 | 2 | 9 | 2 | 3 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | ... | | 6 | 1 | 3 | 7 | 7 | 3 | 1 | 1 | 4 | 6 | 1 | 5 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| ... | | 8 | 1 | 8 | 3 | 6 | 4 | 1 | 5 | 2 | 8 | 2 | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | | | | | | | | | | | ... | | 6 | 7 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 5 | 9 | 0 | 6 | 5 |

Деление осуществляется подбором цифр справа налево, используя тот факт, что для вычисления n последних (правых) цифр произведения достаточно перемножить числа, образованные n последними цифрами сомножителей. (Деление выполняется проще, если основание системы счисления - простое число, иначе возникают неоднозначности в подборе цифр.)

**Дроби.**

Рассмотрим число ...11111 (состоящее из одних единиц). Нетрудно заметить, что ...11111 × ...00009 = ...99999 (т. е. −1). Поэтому можно считать, что ...11111 = −1/9. Дополнение к ...11111 (т. е. ...88889) будет равно +1/9.

Естественно предположить, что всякое периодическое КБЧ (т. е. такое, в котором слева от некоторого разряда идёт бесконечно повторяющаяся последовательность цифр) представляет некоторую дробь (т. е. при умножении периодического КБЧ на некоторое конечное число можно получить конечное число).

**Теорема.**

Если основание системы счисления N - простое число, то для любого числа x, не кончающегося на 0, существует обратное число x−1 (т. е. такое, что x · x−1=1).

**Доказательство**.

Докажем, что мы сможем подобрать последнюю цифру числа x−1, а затем по очереди все остальные, так, чтобы последняя цифра произведения была 1, а все остальные 0.

Пусть x0 - последняя цифра числа x; подберём y0 - последнюю цифру числа x−1. Поскольку основание системы счисления N - простое число, то при вычислениях по модулю N для любого x0 (≠0) мы можем найти такое y0, что x0 · y0 = 1.

Далее, исходя из алгоритма умножения столбиком, для очередной цифры xi мы подберём цифру yi по уравнению0 · yi + xi · y0 + C = 0

(вычисления осуществляются по модулю N; C - «довесок», образующийся от перемножения предыдущих цифр).

Поскольку x0 ≠ 0, то это уравнение всегда разрешимо. Теорема доказана.

**Следствие**.

Если основание системы счисления - простое число, то можно делить (без остатка) на любое число, не кончающееся на 0.

5. Примеры выполнения арифметических операций над р-адическими числами

Пример выполнения арифметических операций над 5-адическими числами.



Пример выполнения деления 5-адических чисел.



Заключение

Работа по данной теме позволила мне гораздо глубже, чем в учебном курсе алгебры, познакомиться с р-адическими числами и операциями над ними.

Теперь можно объяснить, что такое p-адические числа. Они почти не отличаются от вышеописанных КБЧ, однако имеют следующие особенности:

· Основание системы счисления - всегда простое число.

· Цифры записываются в обратном порядке по сравнению с вышеописанным (т. е. бесконечный хвост уходит вправо, а не влево; однако это лишь форма записи, суть от этого не меняется).

· Сами цифры называются «p-адическими цифрами».

Надеюсь, что данные знания помогут мне при выполнении выпускной квалификационной работы.

Список литературы

1. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел, - М.: Наука, 1972.

2. Коблиц Н. р-адические числа, р-адический анализ и дзета-функции, - М.: Мир, 1982

3. Б. Беккер, С. Востоков, Ю. Ионин 2-адические числа <http://kvant.mccme.ru/1979/02/2--adicheskie\_chisla.htm> // Квант <http://gruzdoff.ru/wiki/%D0%9A%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D1%82\_%28%D0%B6%D1%83%D1%80%D0%BD%D0%B0%D0%BB%29>. - 1979. - Т. 2. - С. 26-31

. Серр Ж.-П. Курс арифметики, - М.: Мир, 1972.