**Пифагоровы тройки их количество**

Белотелов В.А.

г. Заволжье

г.

Требуется знание алгоритма решения диофантовых уравнений (АРДУ) и знание прогрессий многочленов.

ПЧ - простое число.

СЧ - составное число.

Пусть есть число N нечётное. Для любого нечётного числа, кроме единицы, можно составить уравнение.

р 2 + N = q2,

где р + q = N, q - р = 1.

Например, для чисел 21 и 23 уравнениями будут,

+ 21 = 112, 112 + 23 = 122.

Если число N простое, данное уравнение единственное. Если число N составное, тогда можно составить подобных уравнений по числу пар сомножителей представляющих это число, включая 1 х N.

Возьмём число N = 45, -

х 45 = 45, 3 х 15 = 45, 5 х 9 = 45.

+ 45 = 232,

+ 45 = 92,

+ 45 = 72.

Мечталось, а нельзя ли уцепившись за это различие между ПЧ и СЧ найти метод их идентификации.

Введём обозначения;

р 2 + N = q2,

a2 + N = в2.

Изменим нижнее уравнение, -

N = в2 - а2 = (в - а)(в + а).

Сгруппируем величины N по признаку в - а, т.е. составим таблицу.



Числа N были сведены в матрицу, -

Таблица 1

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| а\в-а | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 |
| 1 | 15 | 35 | 63 | 99 | 143 | 195 |
| 2 | 21 | 45 | 77 | 117 | 165 | 221 |
| 3 | 27 | 55 | 91 | 135 | 187 | 247 |
| 4 | 35 | 65 | 105 | 153 | 209 | 273 |
| 5 | 39 | 75 | 119 | 171 | 231 | 299 |
| 6 | 45 | 85 | 133 | 189 | 253 | 325 |
| 7 | 51 | 95 | 147 | 207 | 275 | 351 |
|  |  |  |  |  |  |  |

Именно под эту задачу пришлось разбираться с прогрессиями многочленов и их матрицами. Всё оказалось напрасно, - ПЧ оборону держат мощно. Давайте в таблицу 1 введём столбец, где в - а = 1 (q - р = 1).

Таблица 2

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| а\в-а | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 |
| 1 | 3 | 15 | 35 | 63 | 99 | 143 | 195 |
| 2 | 5 | 21 | 45 | 77 | 117 | 165 | 221 |
| 3 | 7 | 27 | 55 | 91 | 135 | 187 | 247 |
| 4 | 9 | 33 | 65 | 105 | 153 | 209 | 273 |
| 5 | 11 | 39 | 75 | 119 | 171 | 231 | 299 |
| 6 | 13 | 45 | 85 | 133 | 189 | 253 | 325 |
| 7 | 15 | 51 | 95 | 147 | 207 | 275 | 351 |

И ещё раз. Таблица 2 получилась в следствии попытки решения задачи об идентификации ПЧ и СЧ. Из таблицы следует, что для любого числа N, существует столько уравнений вида а2 + N = в2, на сколько пар сомножителей можно разбить число N, включая сомножитель 1 х N. Кроме чисел N = ℓ2, где

ℓ - ПЧ. Для N = ℓ2,

где ℓ - ПЧ, существует единственное уравнение р2 + N = q2. О каком дополнительном доказательстве может идти речь, если в таблице перебраны меньшие множители из пар сомножителей, образующих N, от единицы до ∞. Таблицу 2 поместим в сундучок, а сундучок спрячем в чуланчике.

Вернёмся к теме заявленной в названии статьи.

Эта статья является ответом одному профессору - щипачу.

Обратился за помощью, - требовался ряд чисел, который не мог найти в интернете. Напоролся на вопросы типа, - «а за чем?», «а покажи метод». Был в частности задач вопрос, бесконечен ли ряд пифагоровых троек, «а как доказать?». Не помог он мне. Смотри, профессор, как это у нас в деревне делают. Возьмем формулу пифагоровых троек, -

х2 = у2 + z2. (1)

Пропустим через АРДУ.

Возможны три ситуации:. х - нечётное число,

у - чётное число,

z - чётное число.

И есть условие

х > у > z

. х - нечётное число,

у - чётное число,

z - нечётное число.

х > z > у

III.х - чётное число,

у - нечётное число,

z - нечётное число.

х > у > z

Начнём по порядку с I.

Введём новые переменные

диофантовый уравнение пифагоровы тройки

х = 2α + 2к + 1,

у = 2β + 2к,

z = 2γ + 2к + 1.

Подставим в уравнение (1).

(2α + 2к + 1)2 = (2β + 2к)2 + (2γ + 2к + 1)2.

Сократим на меньшее переменное 2γ.

(2α - 2γ + 2к + 1)2 = (2β - 2γ + 2к)2 + (2к + 1)2.

Сократим на меньшее переменное 2β - 2γ с одновременным введением нового параметра ƒ, -

(2α - 2β + 2ƒ + 2к + 1)2 = (2ƒ + 2к)2 + (2к + 1)2 (2)

2α = х - 2к - 1,

2β = у - 2к.

Тогда, 2α - 2β = х - у - 1.

Уравнение (2) примет вид, -

(х - у + 2ƒ + 2к)2 = (2ƒ + 2к)2 + (2к + 1)2

Возведём в квадрат, -

(х - у)2 + 2(2ƒ + 2к)(х - у) + (2ƒ + 2к)2 = (2ƒ + 2к)2 + (2к + 1)2,

(х - у)2 + 2(2ƒ + 2к)(х - у) - (2к + 1)2 = 0. (3)

АРДУ даёт через параметры соотношение между старшими членами уравнения, поэтому мы получили уравнение (3).



.

Не солидно заниматься подбором решений. Но, во - первых, деваться некуда, а во - вторых, этих решений нужно несколько, а бесконечный ряд решений мы сможем восстановить.

При ƒ = 1, к = 1, имеем х - у = 1.

При ƒ = 12, к = 16, имеем х - у = 9.

При ƒ = 4, к = 32, имеем х - у = 25.

Подбирать можно долго, но в конечном итоге ряд примет вид, -

х - у = 1, 9, 25, 49, 81, … .

Рассмотрим вариант II.

Введём в уравнение (1) новые переменные

х = 2α + 2к + 1,

у = 2β + 2к,

z = 2γ + 2к + 1.

(2α + 2к + 1)2 = (2β + 2к)2 + (2γ + 2к + 1)2.

Сократим на меньшее переменное 2 β, -

(2α - 2β + 2к + 1)2 = (2α - 2β + 2к+1)2 + (2к)2.

Сократим на меньшее переменное 2α - 2β, -

(2α - 2γ + 2ƒ + 2к + 1)2 = (2ƒ + 2к + 1)2 + (2к)2. (4)

2α = х - 2к - 1,

2γ = z - 2к - 1.

2α - 2γ = х - z и подставим в уравнение (4).

(х - z + 2ƒ + 2к + 1)2 = (2ƒ + 2к + 1)2 + (2к)2

(х - z)2 + 2(2ƒ + 2к + 1)(х - z) + (2ƒ + 2к + 1)2 = (2ƒ + 2к + 1)2 + (2к)2

(х - z)2 + 2(2ƒ + 2к + 1)(х - z) - (2к)2 = 0





При ƒ = 3, к = 4, имеем х - z = 2.

При ƒ = 8, к = 14, имеем х - z = 8.

При ƒ = 3, к = 24, имеем х - z = 18.

Если дальше будем подбирать, получим ряд

х - z = 2, 8, 18, 32, 50, … .

Нарисуем трапецию, -

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 4 |  | 4 |  | 4 |  |  |  |
|  | 6 |  | 10 |  | 14 |  | 18 |  |  |
| 2 |  | 8 |  | 18 |  | 32 |  | 50 |  |

Напишем формулу.

,

где n=1, 2, . . . ∞.

Случай III расписывать не будем, - нет там решений.

В соответствии с полученными рекомендациями из I и II сгруппируем имеющиеся в популярной литературе тройки. На практике пришлось самому рассчитывать частично.

Для условия II набор троек будет таким:

х - z = 2 х - z = 8 х - z = 18 х - z = 32

= 32 + 42 132 = 52 + 122 252 = 72 + 242 412 = 92 + 402

= 152 + 82 292 = 212 + 202 452 = 272 + 362 652 = 332 + 562

= 352 + 122 532 = 452 + 282 732 = 552 + 482 972 = 652 + 722

= 632 + 162 852 = 772 + 362 1092 = 912 + 602 1372 = 1072 + 882

= 992 + 202 1252 = 1172 + 442 1532 = 1352 + 722 1852 = 1532 + 1042

Уравнение (1) представлено в виде х2 = z2 + у2 для наглядности.

Для условия I набор троек будет таким:

х - у = 1 х - у = 9 х - у = 25

= 42 + 32 452 = 362 + 272 972 = 722 + 652

= 122 + 52 652 = 562 + 332 1252 = 1002 + 752

= 242 + 72 892 = 802 + 392 1572 = 1322 + 852

= 402 + 92 1172 = 1082 + 452 1932 = 1682 + 952

= 602 + 112 1492 = 1402 + 512 2332 = 2082+ 1052

х - у = 49 х - у = 81

= 1202 + 1192 3052 = 2242 + 2072

= 1562 + 1332 3532 = 2722 + 2252

= 1962 + 1472 4052 = 3242 + 2432

= 2402 + 1612 4612 = 3802 + 2612

= 2882 + 1752 5212 = 4402 + 2792

В общей сложности расписано 9 столбцов троек, по пять троек в каждом. И каждый из представленных столбцов можно писать до ∞.

В качестве примера рассмотрим тройки последнего столбца, где х - у = 81.

Для величин х распишем трапецию, -

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | 4 |  | 4 |  | 4 |  |  |
|  |  | 48 |  | 52 |  | 56 |  | 60 |  |
|  | 305 |  | 353 |  | 405 |  | 461 |  | 521 |

Напишем формулу, -

.

Для величин у распишем трапецию, -

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | 4 |  | 4 |  | 4 |  |  |
|  |  | 48 |  | 52 |  | 56 |  | 60 |  |
|  | 224 |  | 272 |  | 324 |  | 380 |  | 440 |

Напишем формулу, -

.

Для величин z распишем трапецию, -

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | 18 |  | 18 |  | 18 |  | 18 |  |
|  | 207 |  | 225 |  | 243 |  | 261 |  | 279 |

Напишем формулу, -

.

Итого:

хn = 2n2 + 42n + 261,

уn = 2n2 + 42n + 180,

zn = 18n + 189.

Где n = 1 ÷ ∞.

Как и обещано, ряд троек при х - у = 81 летит в ∞.

Была попытка для случаев I и II построить матрицы для величин х, у, z.

Выпишем из последних пяти столбцов величины х из верхних строк и построим трапецию.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | 8 |  | 44 |  |  |  |
|  |  |  | 12 |  | 20 |  | 64 |  |  |
|  |  | 40 |  | 52 |  | 72 |  | 136 |  |
|  | 5 |  | 45 |  | 97 |  | 169 |  | 305 |

Не получилось, а закономерность должна быть квадратичной. Чтобы всё было в ажуре, оказалось, что надо объединить столбцы I и II.

В случае II величины у, z снова поменяем местами.





Объединить удалось по одной причине, - карты хорошо легли в этой задаче, - повезло.

Теперь можно расписать матрицы для х, у, z.

Возьмём из последних пяти столбцов величины х из верхних строк и построим трапецию.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 8 |  | 8 |  | 8 |  |  |  |
|  | 12 |  | 20 |  | 28 |  | 36 |  |  |
| 5 |  | 17 |  | 37 |  | 65 |  | 101 |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Всё нормально, можно строить матрицы, и начнём с матрицы для z.

Таблица 3

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| х-у=1 |  9 | 25 | 49 | 81 |
| 3 |  15 | 35 | 63 | 99 |
| 5 |  21 | 45 | 77 | 117 |
| 7 |  27 | 55 | 91 | 135 |
| 9 |  33 | 65 | 105 | 153 |
| 11 |  39 | 75 | 119 | 171 |
| 13 |  45 | 85 | 133 | 189 |
| 15 |  51 | 95 | 147 | 207 |

Итого: Кроме единицы, каждое нечётное число числовой оси участвует в образовании пифагоровых троек равным количеству пар сомножителей образующих данное число N, включая сомножитель 1 х N.

Число N = ℓ2, где ℓ - ПЧ, образует одну пифагорову тройку, если ℓ - СЧ, то на сомножителях ℓхℓ тройки не существует. Построим матрицы для величин х, у.

Таблица 4

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| х-у=1 | 9 | 25 | 49 | 81 |
| 5 | 17 | 37 | 65 | 101 |
| 13 | 29 | 53 | 85 | 125 |
| 25 | 45 | 73 | 109 | 153 |
| 41 | 65 | 97 | 137 | 185 |
| 61 | 89 | 125 | 169 | 221 |
| 85 | 117 | 157 | 205 | 261 |
| 113 | 149 | 193 | 245 | 305 |

Таблица 5

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| х-у=1 | 9 | 25 | 49 | 81 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 |
| 12 | 20 | 28 | 36 | 44 |
| 24 | 36 | 48 | 60 | 72 |
| 40 | 56 | 72 | 88 | 104 |
| 60 | 80 | 100 | 120 | 140 |
| 84 | 108 | 132 | 156 | 180 |
| 112 | 140 | 168 | 196 | 224 |

Начнём работать с матрицей для х. Для этого натянем на неё координатную сетку из задачи по идентификации ПЧ и СЧ.

Таблица 6

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ( в-а-1)/2 а | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 5 | 17 | 37 | 65 | 101 |
| 2 | 13 | 29 | 53 | 85 | 125 |
| 3 | 25 | 45 | 73 | 109 | 153 |
| 4 | 41 | 65 | 97 | 137 | 185 |
| 5 | 61 | 89 | 125 | 169 | 221 |
| 6 | 85 | 117 | 157 | 205 | 261 |
| 7 | 113 | 149 | 193 | 245 | 305 |

Нумерация вертикальных рядов нормирована выражением .

Первый столбец уберём, т.к. 

Матрица примет вид, -

Таблица 7

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ( в-а-1)/2 а | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 17 | 37 | 65 | 101 |
| 2 | 29 | 53 | 85 | 125 |
| 3 | 45 | 73 | 109 | 153 |
| 4 | 65 | 97 | 137 | 185 |
| 5 | 89 | 125 | 169 | 221 |
| 6 | 117 | 157 | 205 | 261 |
| 7 | 149 | 193 | 245 | 305 |

Опишем вертикальные ряды, -













Составим общую формулу для «х», -



Если провести подобную работу для «у», получим, - 

Можно подойти к этому результату и с другой стороны.

Возьмём уравнение, - а2 + N = в2.

Чуть преобразуем, - N = в2 - а2.

Возведём в квадрат, - N2 = в4 - 2в2а2 + а4.

К левой и правой части уравнения добавим по величине 4в2а2, -

N2 + 4в2а2 = в4 + 2в2а2 + а4.

И окончательно, - (в2 + а2)2 = (2ва)2 + N2.

Пифагоровы тройки составляются так:

Рассмотрим пример с числом N = 117.

х 117 = 117, 3 х 39 = 117, 9 х 13 = 117.

Вертикальные столбцы таблицы 2 пронумерованы величинами в - а, тогда как вертикальные столбцы таблицы 3 пронумерованы величинами х - у.

х - у = (в - а)2,

х = у + (в - а)2.

Составим три уравнения.

(у + 12)2 = у2 + 1172,

(у + 32)2 = у2 + 1172,

(у + 92)2 = у2 + 1172.

х1 = 6845, у1 = 6844, z1 = 117.

х2 = 765, у2 = 756, z2 = 117 (х2 = 85, у2 = 84, z2 = 13).

х3 = 125, у3 = 44, z3 = 117.

Сомножители 3 и 39 не являются взаимно простыми числами, поэтому одна тройка получилась с коэффициентом 9.

Изобразим выше написанное в общих символах, -









В данной работе всё, включая пример на расчёт пифагоровых троек с числом

N = 117, привязано к меньшему сомножителю в - а. Явная дискриминация по отношению к сомножителю в + а. Исправим эту несправедливость, - составим три уравнения с сомножителем в + а.

(у + 1172)2 = у2 + 1172

(у + 392)2 = у2 + 1172

(у + 132)2 = у2 + 1172

х1 = 6845, у1 = - 6844, z1 = 117.

х2 = 765, у2 = - 756, z2 = 117.

х3 = 125, у3 = - 44, z3 = 117.

Вернёмся к вопросу об идентификации ПЧ и СЧ.

Много что было совершено в этом направлении и на сегодняшний день через руки дошла следующая мысль, - уравнения идентификации, да такого чтобы и сомножители определить, не существует.

Допустим найдено соотношение F = а,в (N).

Есть формула

.

.

Можно избавиться в формуле F от в и получится однородное уравнение n - ой степени относительно а, т.е. F = а(N).

При любой степени n данного уравнения найдётся число N имеющее m пар сомножителей, при m > n.

И как следствие, однородное уравнение n степени должно иметь m корней.

Да быть такого не может.

В данной работе числа N рассматривались для уравнения х2 = у2 + z2, когда они находятся в уравнении на месте z. Когда N на месте х, - это уже другая задача.