Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

"Челябинский государственный педагогический университет"

Физико-математический факультет

Специальность 050201 Математика с дополнительной специальностью 080507 менеджмент

Кафедра математики и методики обучения математике

**Выпускная квалификационная работа**

**Поведение фазовых траекторий динамических систем**

Выполнила: студентка 511 гр.

Климентьева Ксения Сергеевна

Научный руководитель:

Канд. физ. мат. наук, доцент

Макаров Анатолий Семенович

Челябинск, 2015

**Содержание**

Введение

Глава 1. Дифференциальные уравнения как модели эволюционных процессов

Глава 2. Системы дифференциальных уравнений

.1 Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами

.2 Метод Эйлера

Глава 3. Автономные системы дифференциальных уравнений и их фазовые пространства

.1 Понятие фазового пространства

.2 Уравнение с многомерным фазовым пространством

.3 Положения равновесия и замкнутые траектории

.4 Простейшие типы особых точек

Глава 4. Устойчивость решений автономной системы дифференциальных уравнений

.1 Определение устойчивости. Асимптотическая устойчивость

.2 Асимптотическая устойчивость линейных однородных автономных систем

.3 Критерий Гурвица

.4 Устойчивость неоднородных систем. Теорема о первом приближении

.5 Нахождение области устойчивости системы с параметрами

Заключение

Список литературы

Приложение. Изображения фазовых кривых при помощи программы Maple

**Введение**

Цель выпускной квалификационной работы - исследовать поведение фазовых траекторий динамических систем. Рассмотреть поведение фазовых кривых в фазовом пространстве. При помощи компьютерной программы Maple проиллюстрировать эти фазовые кривые.

Качественная теория дифференциальных уравнений, или, как ее теперь чаще называют, теория динамических систем, является сейчас наиболее активно развивающейся и имеющей наиболее важные приложения в естествознании областью теории дифференциальных уравнений. Эта теория была разработана Пуанкаре (1854 - 1912) и вместе с теорией функций комплексных переменных привела к основанию современной топологии.

Основная задача состояла в определении или исследовании движения системы по векторному полю фазовой скорости. Сюда относятся вопросы о виде фазовых кривых: уходят ли фазовые кривые данного векторного поля в фазовом пространстве на бесконечность или остаются в ограниченной области.

В простейших частных случаях задача решается явно при помощи интегрирования. Вычислительные машины позволяют приближенно находить решения дифференциальных уравнений на конечном отрезке времени, но не дают ответа на качественные вопросы о поведении фазовых кривых в целом. В своей дипломной работе я рассматривала геометрическую, качественную сторону изучаемых явлений.

Выпускная квалификационная работа состоит из 4 глав, заключения, списка литературы и приложений.

В первой главе дается понятие эволюционного процесса, обладающего свойствами детерминированности, конечномерности и дифференцируемости. Математической моделью такого процесса является обыкновенное дифференциальное уравнение.

Во второй главе раскрывается понятие линейной однородной системы с постоянными коэффициентами. Приводится один из методов интегрирования однородных линейных систем с постоянными коэффициентами - метод Эйлера. Рассматриваются примеры с решением на этот метод.

Третья глава раскрывает понятие фазового пространства. С фазовым пространством связана система дифференциальных уравнений. Решение системы дифференциальных уравнений на фазовом пространстве интерпретируется в виде траекторий (фазовых кривых), а сама система дифференциальных уравнений интерпретируется в виде векторного поля. На фазовом пространстве возможны три вида фазовых кривых: кривые без самопересечения, замкнутые кривые и положения равновесия (особые точки, которые являются фазовыми кривыми). Особо рассмотрены положения равновесия: возможные простейшие типы особых точек.

Четвертая глава посвящена устойчивости решений автономной системы дифференциальных уравнений. Здесь главным является определение устойчивости, асимптотической устойчивости, теорема о первом приближении. Приведены примеры на исследование на устойчивость решения системы дифференциальных уравнений.

**Глава 1. Дифференциальные уравнения как модели эволюционных процессов**

Многие эволюционные процессы, с которыми мы встречаемся в жизни, могут быть описаны с помощью теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, процесс радиоактивного распада, процесс размножения бактерий при достаточном количестве питательного вещества, движение системы тел в классической механике.

**Определение:** Процесс называется детерминированным, если весь его будущий ход и все его прошлое однозначно определяется состоянием в настоящее время.

**Определение:** Множество всевозможных состояний процесса называется фазовым пространством.

**Определение:** Процесс называется конечномерным, если его фазовое пространство конечномерно, т.е. если число параметров, нужных для описания его состояния, конечно.

**Определение:** Процесс называется дифференцируемым, если изменение его состояния со временем описывается дифференцируемыми функциями.

Например, процесс радиоактивного распада. Фазовое пространство этого процесса одномерно: состояние процесса определяется количеством вещества. Процесс описывается обыкновенным дифференциальным уравнением:

Движение всей системы описывается движением точки по кривой в фазовом пространстве. Скорость движения фазовой точки по этой кривой определяется самой точкой. Таким образом, в каждой точке фазового пространства задан вектор - он называется вектором фазовой скорости. Все векторы фазовой скорости образуют векторное поле фазовой скорости в фазовом пространстве. Это векторное поле определяет дифференциальное уравнение процесса (зависимость скорости движения фазовой точки от ее положения).

Основная задача теории дифференциальных уравнений состоит в определении или исследовании движения системы по векторному полю фазовой скорости. Сюда относятся, например, вопросы о виде фазовых кривых (траекторий движения фазовой точки): уходят ли фазовые кривые данного векторного поля в фазовом пространстве на бесконечность или остаются в ограниченной области.

Понятие фазового пространства сводит изучение эволюционных процессов к геометрическим задачам о кривых, определяемых векторными полями.

**Глава 2. Системы дифференциальных уравнений**

**.1 Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами**

Линейной однородной системой с постоянными коэффициентами называется система дифференциальных уравнений вида:

 - постоянные, а - искомые функции от *t*.

Систему (1) можно коротко записать в виде одного матричного уравнения:

Одностолбцовая матрица:

называется частным решением уравнения (2) в интервале (*a, b*), если выполняется тождество:

**Теорема:** Если система частных решений однородного уравнения (2) является фундаментальной, то общее решение этого уравнения имеет вид:

где

**.2 Метод Эйлера**

Для интегрирования однородных линейных систем с постоянными коэффициентами применяется метод Эйлера. Рассмотрим этот метод в применении к системе трех линейных дифференциальных уравнений:

Решение системы (4) ищем в виде:

Подставляя (5) в (4) и сокращая на , получаем систему уравнений для определения л,µ, и н:

Система (6) имеет ненулевое решение, когда ее определитель Д равен нулю,

Уравнение (7) называется характеристическим.

Случай А. Пусть корни характеристического уравнения - вещественные и различные. Подставив в (6) вместо *r* число и решив систему (6), получим числа Затем положим в (6) и получим числа и, наконец, при получим Соответственно трем наборам чисел получим три частных решения:

Общее решение системы (4) имеет вид:

**Пример 1.** Решить систему дифференциальных уравнений.

**Решение:** Составляем характеристическое уравнение:

или

Корням соответствуют числа:

Выписываем частные решения:

Общее решение системы:

Б. Рассмотрим теперь случай, когда корни характеристического уравнения комплексные.

**Пример 2.** Решить систему линейных однородных дифференциальных уравнений.

**Решение:** Выпишем систему для определения л и

Характеристическое уравнение:

имеет корни Подставляя получаем уравнения для определения

из которых одно является следствием другого (в силу того, что определитель системы (9) равен нулю.)

Возьмем тогда первое частное решение запишется так:

Аналогично, подставляя в (9) корень найдем второе частное решение:

Перейдем к новой фундаментальной системе решений:

Пользуясь известной формулой Эйлера

из (10), (11) и (12) получаем:

Общим решением системы (8) будет:

**Замечание.** Найдя первое частное решение (10), можно было бы сразу написать общее решение системы (8), пользуясь формулами:

где *Re z* и *Im z* обозначают соответственно действительную и мнимую части комплексного числа *z,* т.е. если

В. Случай кратных корней.

**Пример 3.** Решить систему.

**Решение:** Характеристическое уравнение:

или

имеет кратный корень

Решение следует искать в виде:

Подставляя (14) в первое уравнение системы (13), получаем:

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *t* в левой и правой части (15), получаем:

Величины остаются произвольными. Обозначая их соответственно через , получаем общее решение системы (13):

**Замечание.** Легко проверить, что если (14) подставить во второе уравнение системы (13), то получим тот же результат (16). В самом деле, из равенства

Получаем два соотношения для определения

**Глава 3. Автономные системы дифференциальных уравнений и их фазовые пространства**

**.1 Понятие фазового пространства**

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений, т. е. систему обыкновенных дифференциальных уравнений, в которую явно не входит независимая переменная *t* (время). Это значит, что закон изменения неизвестных функций, описываемый системой уравнений не меняется с течением времени:

Эта система определена на множестве U . Поэтому каждой точке множества U поставлена в соответствие последовательность из n - чисел: Эти числа можно рассматривать как компоненты вектора проведенного в n - мерном пространстве и выходящего из точки

Итак, автономной системе ставится в соответствие геометрический образ - векторное поле, заданное на множестве U. В каждой точке множества U определен вектор выходящий из этой точки.

Связь между геометрической интерпретацией решений и геометрической интерпретацией самой системы уравнений заключается в следующем. Пусть - произвольная точка множества U. В силу геометрической интерпретации системы уравнений этой точке поставлен в соответствие выходящий из нее вектор Для системы (1) существует решение:

,

удовлетворяющее начальным условиям

.

Каждому решению автономной системы (1) поставим в соответствие движение точки в n - мерном пространстве, задаваемое уравнениями (2), где координаты точки в пространстве, а *t* - время. В процессе своего движения точка описывает некоторую кривую - траекторию движения. Если сопоставить решению (2) не процесс движения, а траекторию движения точки, то получим менее полное представление о решении, поэтому желательно на траектории указывать направление движения.

В момент времени движущаяся точка проходит через положение в пространстве. Оказывается, что векторная скорость точки, описывающей решение в момент ее прохождения через положение совпадает с вектором . Это совпадение выражается системой уравнений (1) при

**Определение:** Пространство размерности *n*, в котором интерпретируются решения автономной системы (1) в виде траекторий и сама автономная система (1) в виде векторного поля, называется фазовым пространством системы (1).

**Определение:** Траектории называются фазовыми траекториями (кривыми).

**Определение:** Векторы называются фазовыми скоростями.

Система (1) обычно называется динамической, тогда фазовое пространство этой системы это пространство с координатами .

Геометрическая интерпретация решения (2) системы уравнений (1) ставит в соответствие этому решению кривую ***k*** в (*n+1)* - мерном пространстве переменных , определяемую системой уравнений (2). Здесь *t* является одной из координат в пространстве R.

Переход к интерпретации в *n -* мерном фазовом пространстве U переменных заключается в том, что мы перестаем считать величину *t* координатой точки, а считаем ее параметром. Таким образом, фазовая траектория ***L*** получается из кривой ***k*** в результате проектирования пространства R на пространство U в направлении оси *t*.

Геометрическую наглядность это проектирование приобретает при *n* = 2. В этом случае пространство R - трехмерное, а пространство U представляет собой плоскость.

Итак, фазовые траектории на фазовой плоскости *(x,y)* представляют собой проекции трехмерной спирали на плоскость *(x,y)*. Это кривые, которые можно видеть, если смотреть на спираль с точек, находящихся на оси *t*.

**.2 Уравнение с многомерным фазовым пространством**

Пусть векторное поле в области U *n* - мерного фазового пространства.

**Определение:** Автономное дифференциальное уравнение, заданное полем ʋ - это уравнение

где

Здесь уравнение (3) - это векторная запись системы (1).

**Определение:** Решением такого уравнения называется гладкое отображение интервала оси времени в фазовое пространство, для которого при всех

Образ отображения называется фазовой кривой дифференциального уравнения (3), а график отображения - интегральной кривой. Интегральная кривая лежит в прямом произведении оси времени на фазовое пространство Это прямое произведение называется расширенным фазовым пространством. Расширенное фазовое пространство имеет размерность

Пусть - точка расширенного фазового пространства. Решение удовлетворяет начальным условиям , если , т. е. если интегральная кривая проходит через точку

Пусть дано дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными вида:

Будем предполагать, что *f* и *g -* гладкие функции, не обращающиеся в 0 в рассматриваемой области.

Рассмотрим наряду с этим уравнением систему дифференциальных уравнений:

**Теорема:** Фазовые кривые системы (5) являются интегральными кривыми уравнения (4), и, обратно, интегральные кривые уравнения (4) являются фазовыми кривыми системы.

Доказательство:

Тангенс угла наклона вектора фазовой скорости к оси есть Значит фазовая кривая системы в каждой своей точке касается поля направлений уравнения.

Обратно, пусть дана интегральная кривая уравнения (4) . Тогда на ней можно выбрать параметр так, что параметрическое уравнение кривой будет: причем функция решение уравнения по условию).

Вторая компонента ш точки с параметром удовлетворяет тогда соотношению:

т. е. является решением уравнения

Следовательно, интегральная кривая - фазовая кривая системы. Теорема доказана.

**.3 Положения равновесия и замкнутые траектории**

Пусть

некоторое решение системы:

Допустим, что имеет место равенство

Возможны два следующих взаимно исключающих случая:

) Для всех значений имеет место равенство:

где - точка множества U, не зависящая от . Таким образом, в этом случае точка в действительности не движется при изменении , а стоит на месте. Само решение (6) и точка в этом случае называются положением равновесия системы (7)

) Существует такое положительное число T, что при произвольном имеет место равенство:

но при хотя бы для одного имеет место неравенство:

В этом случае решение (6) называется периодическим с периодом T, а траектория, описываемая решением (6) называется замкнутой траекторией, или циклом.

Итак, можно сделать вывод. На фазовой плоскости (в общем случае - в фазовом пространстве) возможны три сорта фазовых кривых: во-первых, положение равновесия; во-вторых, периодические траектории (циклы); в-третьих, траектории без самопересечения.

Среди всех траекторий особо выделяются самопересекающиеся, которые являются либо положениями равновесия, либо циклами.

Незамкнутые фазовые кривые, хотя и не могут самопересекаться, могут сложным образом навиваться сами на себя.

Рассмотрим положение равновесия с точки зрения фазовых скоростей. Для того, чтобы точка множества U была положением равновесия системы (7), т. е. имелось решение системы, для которой бы необходимо и достаточно, чтобы фазовая скорость в точке была равна 0.

Таким образом, для отыскания всех положений равновесия системы (7) нужно решить систему уравнений:

Эта система представляет собой не систему дифференциальных уравнений, а систему конечных уравнений (производные в нее не входят). Точку еще называют особой точкой.

**.4 Простейшие типы особых точек**

Существуют различные точки положений равновесия [5], различаемые по характеру поведения фазовых кривых вблизи данного положения равновесия. Положение равновесия системы (7), исходящее при из точки, достаточной близкой к , остается в течение всего дальнейшего своего изменения (т. е. при вблизи точки .

Исследуем расположение траекторий в окрестности точки покоя системы двух линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами:

где

Ищем решение в виде

.

Для определения получаем характеристическое уравнение

или

с точностью до постоянного множителя определяются из одного из уравнений:

(9)

Рассмотрим следующие случаи:

*а) Корни характеристического уравнения действительны и различны.*

Общее решение имеет вид:

(10)

где - постоянные, определяемые из уравнений (9) соответственно при и при , а - произвольные постоянные, при этом возможны следующие случаи:

) Если , то точка покоя асимптотически устойчива, так как из - за наличия множителей в (10) все точки, находящиеся в начальный момент времени в любой - окрестности начала координат, при достаточно большом переходят в точки, лежащие в сколь угодно малой окрестности начала координат, а при стремятся к началу координат. На рис. 1 изображено расположение траекторий около точки покоя рассматриваемого типа, называемой устойчивым узлом, причем стрелками указано направление движения по траекториям при возрастании .

Рис. 1.

1) 2) Пусть Этот случай переходит в предыдущий при замене . Следовательно. Траектории имеют так же вид, как в предыдущем случае, но только точка по траекториям движется в противоположном направлении (рис. 2). Точка покоя рассматриваемого типа называется неустойчивым узлом.

Рис. 2.

3) Если то тока покоя тоже неустойчива, так как движущаяся по траектории (11) точка при сколь угодно малых значениях с возрастанием выходит из окрестности начала координат. В рассматриваемом случае существуют движения, приближающиеся к началу координат, а именно:

Движущиеся по другим траекториям точки уходят на бесконечность. Особая точка рассматриваемого типа называется седлом (рис. 3).

Рис. 3.

*б) Корни характеристического уравнения комплексны:*

При этом возможны следующие случаи:

1)

Траектории в этом случае имеют вид спиралей, закручивающихся к особой точке. При достаточно большом движущиеся точки, находящиеся в любой окрестности начала координат, попадают в малую окрестность особой точки, а при дальнейшем возрастании стремятся к этой точке. Следовательно, точка покоя асимптотически устойчива - она называется устойчивым фокусом (рис. 4). Фокус отличается от узла тем, что касательная к траекториям не стремится к определенному пределу при приближении точки касания к точке покоя.

Рис. 4.

)

Этот случай переходит в предыдущий при замене Следовательно, траектории не отличаются от траекторий предыдущего случая, но движение по ним происходит при возрастании в противоположном направлении (рис. 5), т. е. имеем спирали, раскручивающиеся от особой точки. Точка покоя носит название неустойчивого фокуса.

Рис. 5.

)

На рисунке 6 изображена точка типа центр. В силу периодичности решений, траектории в этом случае - замкнутые кривые, содержащие внутри себя особую точку. В зависимости от начальных условий изображающая точка с возрастанием описывает замкнутую кривую, затем продолжает по ней движение. Центр является устойчивой особой точкой.

Рис. 6.

**Глава 4. Устойчивость решений автономной системы дифференциальных уравнений**

**.1 Определение устойчивости. Асимптотическая устойчивость**

уравнение дифференциальный пространство асимптотический

Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

Решение системы (\*), удовлетворяющее начальным условиям называется **устойчивым** по Ляпунову при , если для любого такое, что для всякого решения начальные значения которого удовлетворяют условиям

имеют место неравенства

для всех

Если при сколь угодно малом хотя бы для одного решения неравенства (\*\*\*) не выполняются, то решение называется **неустойчивым.** Если, кроме выполнения неравенств (\*\*\*) при условии (\*\*) выполняется также условие

то решение называется **асимптотически устойчивым**.

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

где и пусть

соответствующая однородная система.

**Определение:** Линейную систему (1) будем называть устойчивой (или вполне неустойчивой), если все ее решения соответственно устойчивы (или неустойчивы) по Ляпунову при

**Замечание:** Решения линейных дифференциальных систем либо все одновременно устойчивы, либо неустойчивы. Подобная терминология не применима к нелинейным дифференциальным системам, некоторые решения которых могут быть устойчивыми, а другие - неустойчивыми.

**Определение:** Линейную дифференциальную систему (1) назовем асимптотически устойчивой, если все решения этой системы асимптотически устойчивы при

**4.2 Асимптотическая устойчивость линейных однородных автономных систем**

Рассмотрим систему

Положим

тогда учитывая свойства экспоненциала матрицы будем иметь

или

Так как

то матрица неособенная. Поэтому из (2) получаем

и, следовательно, где - матрица.

Таким образом, общее решение системы (1) с постоянной матрицей А есть:

Пусть . Из формулы (3) имеем

и, значит,

**Теорема:** Линейная однородная система (1) с постоянной матрицей А устойчива тогда и только тогда, когда все характеристические корни матрицы А обладают неположительными вещественными частями причем характеристические корни, имеющие нулевые вещественные части, допускают лишь простые элементарные делители (т.е. соответствующие клетки Жордана сводятся к одному элементу).

Без доказательства.

**Теорема:** Линейная однородная дифференциальная система (1) с постоянной матрицей А асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все характеристические корни матрицы А имеют отрицательные вещественные части, т.е.

Без доказательства.

**Пример:** Исследовать на устойчивость решения системы уравнений

**Решение:** Запишем характеристическое уравнение матрицы коэффициентов данной системы:

 или

Корни этого уравнения имеют отрицательные вещественные части, если одновременно , т.е. если При таких решения данной системы асимптотически устойчивы. Если то при таких значениях характеристическое уравнение имеет один положительный корень или пару комплексных корней с положительной вещественной частью. В этом случае решения данных уравнений неустойчивы. При один из корней характеристического уравнения равен нулю, а второй -0,5; поэтому решения исходных уравнений при устойчивы. Решения устойчивы также и при , так как в этом случае корни характеристического уравнения мнимые.

**.3 Критерий Гурвица**

Рассмотрим полином

где - комплексное число и действительные или комплексные коэффициенты.

**Определение:** Полином степени называется полиномом Гурвица, если все его корни (нули) обладают отрицательными вещественными частями

т.е. все корни расположены в левой комплексной полуплоскости.

В дальнейшем мы будем предполагать, что коэффициенты полинома действительны, причем

Такой, очевидно, не имеющий нулевых корней полином для краткости будем называть стандартным полиномом степени

Рассмотрим стандартный полином

где

Составим матрицу Гурвица

где принято

**Теорема Гурвица:** Для того чтобы стандартный полином (4) являлся полиномом Гурвица, необходимо и достаточно, чтобы были положительны все главные диагональные миноры

его матрицы Гурвица (условие Гурвица).

**Частные случаи для системы из 2х и 3х уравнений.**

Применим теорему Гурвица к многочленам второй и третьей степени.

а)

Условия Гурвица сводятся к Эти неравенства в пространстве коэффициентов определяют первую четверть (рис. 1).

На рис. 1 изображена область асимптотической устойчивости тривиального решения некоторой системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющей условиям теоремы Ляпунова об устойчивости, если является ее характеристическим многочленом.

б)

Условия Гурвица сводятся к Область, определяемая этим неравенством в пространстве коэффициентов, изображена на рис. 2.

Рис. 2

Для рассмотренных многочленов условия Гурвица очень удобны и легко проверяемы, однако с возрастанием степени многочлена условия Гурвица быстро усложняются, и часто вместо них удобнее применять другие признаки отрицательности действительных частей корней многочленов.

**.4 Устойчивость неоднородных систем. Теорема о первом приближении**

При исследовании на устойчивость точки покоя системы дифференциальных уравнений

где - дифференцируемые в окрестности начала координат функции, часто применяется следующий метод: пользуясь дифференцируемостью функций представляют систему (1) в окрестности начала координат в виде

где имеют порядок выше первого относительно и вместо точки покоя системы (2) исследуют на устойчивость ту же точку покоя линейной системы

называемой *системой уравнений первого приближения* для системы (2).

Исследование на устойчивость системы уравнений первого приближения, конечно, является задачей значительно более легкой, чем исследование исходной, вообще говоря, нелинейной системы, однако даже исследование линейной системы (3) при переменных коэффициентах является задачей весьма сложной. Если же все постоянны, т.е. система стационарна в первом приближении, то исследование на устойчивость линейной системы (3) не представляет принципиальных затруднений.

**Теорема 1:** Если система уравнений (2) стационарна в первом приближении, все члены в достаточно малой окрестности начала координат при удовлетворяют неравенствам

где - постоянные, причем (т.е. если не зависят от , то их порядок выше первого относительно ), и все корни характеристического уравнения

имеют отрицательные действительные части, то тривиальные решения системы уравнений (2) и системы уравнений (3) асимптотически устойчивы, следовательно, в этом случае возможно исследование на устойчивость по первому приближению.

**Теорема 2:** Если система уравнений (2) стационарна в первом приближении, все функции удовлетворяют условиям предыдущей теоремы и хотя бы один корень характеристического уравнения (4) имеет положительную действительную часть, то точки покоя системы (2) и системы (3) неустойчивы, следовательно, и в этом случае возможно исследование на устойчивость по первому приближению.

**Пример 1:** Исследовать на устойчивость точку покоя системы

Нелинейные члены удовлетворяют условиям теорем 1 и 2. Исследуем на устойчивость точку покоя системы первого приближения

Характеристическое уравнение

имеет корни следовательно, в силу теоремы 2 точка покоя этих систем неустойчива.

**Пример 2:** Исследовать на устойчивость точку покоя системы

Разлагая по формуле Тейлора, представляем систему в виде

где удовлетворяют условиям теорем 1 и 2.

Выпишем разложение по формуле Тейлора.

Характеристическое уравнение

для системы первого приближения

Характеристическое уравнение имеет корни

,

следовательно, в силу теоремы 1 точка покоя асимптотически устойчива.

**4.5 Нахождение области устойчивости системы с параметрами**

**Пример 1:** Определить область асимптотической устойчивости для системы

где - действительные параметры.

Характеристическое уравнение для системы имеет вид

или

Воспользуемся частным случаем критерия Гурвица для многочлена второй степени: условия Гурвица сводятся к Значит

Отсюда асимптотическая устойчивость будет иметь место, если

**Пример 2:** При каких значениях параметра тривиальное решение системы дифференциальных уравнений

асимптотически устойчиво?

Характеристическое уравнение имеет вид

По признаку Гурвица условиями асимптотической устойчивости будут

Эти условия в данном случае сводятся к , т. е. при нулевое решение будет асимптотически устойчиво.

**Заключение**

Мною было изучено поведение фазовых траекторий следующих динамических систем:

1.

.

.

.

Для каждой динамической системы с помощью компьютерной программы Maple построены фазовые кривые, рассмотрено их поведение. Рисунки подтверждают наличие в фазовом пространстве траекторий трех видов: кривые без самопересечения, замкнутых кривых и положений равновесия.

Работа проведена успешно, результаты работы могут быть использованы на факультативах и в научной работе студентов.

**Список литературы**

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости.

М.: "Наука", 1967, 472 стр.

. Киселев А.И., Краснов М.Л., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Высшая школа, 2002, 256 стр.

3. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Учебное пособие для ВУЗов. М.: Высшая школа, 1983, 256 стр.

. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи. М.: Высшая школа, 1989, 383 стр.

. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения. М.: КомКнига, 2006, 312 стр.

. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Ленанд, 2000, 240 стр.

**Приложение. Изображения фазовых кривых при помощи программы Maple**

**1.** Фазовая траектория системы:

**2.** .

**1. 3.** Фазовая траектория системы:

тип особой точки - центр,

**4.** Фазовая траектория системы:

тип особой точки - фокус, t от 0 до 100.

Корни характеристического уравнения:

**.**

Т. к. , то точка покоя - устойчивый фокус.

**5.** Фазовая траектория для системы:

тип особой точки - седло,