**Приложение определенного интеграла к решению технических задач**

**1. Общая схема применения определенного интеграла**

интеграл неподвижный ось

Если всякому промежутку , содержащемуся в некотором фиксированном промежутке , отвечает значение определенной физической и геометрической величины , то  называют функцией промежутка  и обозначают .

Функция промежутка  называется аддитивной, если при  имеем

.

Рассмотрим аддитивную функцию промежутка  и допустим, что на фиксированном промежутка  определена непрерывная функция , связанная с функцией , , соотношением

,

где  - такая функция, что



(то есть  является бесконечно малой величиной высшего порядка по сравнению с .

Тогда

 (1)

Таким образом, если удалось с точностью до бесконечно малой высшего порядка по сравнению с  установить приближенное равенство

,

то можно вычислить интересующее значение  по формуле (1). В этом и состоит схема применения определенного интеграла.

**2. Вычисления моментов и координат центра тяжести плоских фигур**

Пусть  - система материальных точек (с массами соответственно , лежащих в одной плоскости, а  и - соответственно координаты точек . Величины

 и 

называются статическим моментом этой системы точек относительно осей  и , а величины

 и 

называются моментами инерции этой системы относительно осей  и .

Предположим, что вдоль произвольной гладкой кривой , , равномерно распределена масса с линейной плотностью . Тогда статическими моментами дуги кривой (при ) относительно осей координат называются величины

; , (2)

а моментами инерции дуги кривой относительно осей координат называются величины

 и

. (3)

Координаты центра тяжести дуги однородной кривой  (с равномерно распределенной массой, линейная плотность которой ) вычисляются по формулам

; , (4)

где -длина дуги кривой , .

Если рассматриваемая дуга симметрична относительно некоторой прямой, то центр тяжести дуги лежит на этой прямой. Статическими моментами однородной криволинейной трапеции , , ,  (с равномерно распределенной массой, поверхностная плотность которой , относительно осей координат называют величины

, , (5)

а моментами инерции этой трапеции относительно осей координат - величины

, , (6)

в предположении, что кривая не пересекает ось .

Координаты центра тяжести однородной криволинейной трапеции вычисляются по формулам

, , (7)

где  - площадь трапеции.

Если плоская фигура имеет ось симметрии, то центр тяжести фигуры лежит на этой оси.

Задача 1. Найти статический момент и момент инерции однородной  дуги полуокружности радиуса  относительно диаметра, проходящего через концы этой дуги (рис 1).

Решение. Расположим дугу полуокружности так, чтобы диаметр совпадал с осью , центр круга совпадал с началом координат, а рассматриваемая полуокружность оказалась в верхней полуплоскости. Тогда искомыми моментами будут  и . Разобьем дугу полуокружности на элементарные дуги , считаем при этом, что масса  сосредоточена в начальной точке этой дуги . Тогда масса дуги (так как )

.

С точностью до бесконечно малой того же порядка, что и , имеем

;

.

На основании общей схемы применения определенного интеграла получим:

;

.

Задача 2. Найти статический момент однородной  дуги параболы   относительно прямой  (рис. 2).

Решение. Аналогично предыдущей задаче, считаем, что масса дуги  параболы сосредоточена в начальной точке  этой дуги. Тогда (с точностью до бесконечно малой более высокого порядка малости, чем )

.

Применяя общую схему, о которой говорилось ранее и, принимая во внимание симметрию кривой относительно оси , получаем



Интеграл , где , берется по частям:



где  - произвольная постоянная.

Откуда

.

Задача 3. Найти статический момент и момент инерции однородной треугольной пластинки с основанием  и высотой  относительно основания (рис. 3).

Решение. Поскольку треугольная пластинка однородна, полагаем . Разместим пластинку так, чтобы ось  совпала с ее высотой . Отрезок , концы которого лежат на боковых сторонах треугольника, параллельный основанию и находящийся на расстоянии   от него, имеет длину ,

Рассмотрим горизонтальную полоску шириной , параллельную основанию треугольника, приняв ее приближенно за прямоугольник со сторонами длиной  и . С точностью до бесконечно малых более высокого порядка чем  получим, что площадь полоски равна , а статический момент и момент инерции полоски относительно основания в треугольнике соответственно

,

.

На основании общей теории применения интеграла получаем

,

.

Задача 4. Найти моменты инерции  и  относительно осей  и  параболического сегмента, ограниченного кривыми   и  (рис. 4).

Решение. По формулам

, 

и, учитывая, что для данного параболического сегмента , получаем:

;

.

Задача 5. Найти моменты инерции однородной эллиптической пластины  с полуосями  и  относительно ее главных осей.

Решение. Возьмем за главные оси координат. Запишем параметрические уравнения эллипса в форме



тогда при изменении  от  до  переменная  возрастает от  до . В силу симметрии пластины относительно осей достаточно вычислить моменты инерции четвертой ее части и каждый результат увеличить в четыре раза. Таким образом, по формулам (6) получаем:

;

.

Задача 6. Определить координаты центра тяжести круговой дуги (рис. 5)

  .

Решение. Дуга симметрична относительно оси , поэтому центр тяжести дуги  находится на оси , то есть . Вычислим длину кривой  и ее статический момент  относительно оси :

 .

Найдем координату  центра тяжести:

,

таким образом, .

Задача 7. Определить координаты центра тяжести области, ограниченной параболами ;   (рис. 6).

Решение. Точки плоской фигуры симметричны относительно биссектрисы первого координатного угла, поэтому центр тяжести находится на этой биссектрисе,  и ; ; тогда .

Задача 8. Определить координаты центра тяжести области

 (, , ).

Решение. Уравнение четвертой части эллипса запишем в виде

 .

Тогда, используя формулы (6) и учитывая, что для данной области , получаем

;

.

Поскольку , то

; .

Задача 9. Определить координаты центра тяжести области, ограниченной кривой  (рис. 7).

Решение. Область симметрична относительно полярной оси, поэтому на ней лежит центр тяжести. Рассмотрим криволинейный сектор с углом при вершине , образованный лучами  и  и дугой кривой. Приняв его за круговой сектор со сторонами  и углом при вершине , можно приближенно вычислить его площадь: . На основании того, что центр тяжести однородной треугольной пластинки находится в точке пересечения медиан треугольника, можно считать, что центр тяжести криволинейного сектора находится на расстоянии  от полюса, поэтому статический момент сектора относительно прямой  приближенно (с точностью до бесконечно малой более высокого порядка, чем .

,

откуда 

Площадь области, ограниченной кардиоидой , . Поэтому . Обозначив координаты центра тяжести  и , получим ; .

Задача 10 Определить координаты центра тяжести области, ограниченной первой аркой циклоиды ; , и осью 

Решение. Так как для данной области , то

.

Для вычисления интеграла  использовали формулу понижения для интеграла , согласно которой

, 

В частности

  - четное;  - нечетное.

Аналогично,

  - четное;  - нечетное.

Далее,



Площадь, ограниченная первой аркой циклоиды и осью , , следовательно, координаты центра тяжести  фигуры

; .

**3. Решения задач на вычисление работы**

Каждая из приведенных в данном разделе задач требует применения соответствующих законов физики, но все они решаются, подчиняясь общей схеме:

) вычисление элементарной работы ;

) построение интегральной суммы ;

) переход к пределу: .

Задача 11. Какую работу надо затратить, чтобы тело массы  поднять с поверхности Земли, радиус которой , на высоту ? Чему равна работа, если тело удаляется в бесконечность?

Решение. На тело массы  действует сила притяжения Земли, обратно пропорциональная квадрату расстояния тело от центра Земли и направленная к центру Земли :

,

где  - постоянная, определяемая из условия, что на поверхности Земли  сила  равна силе веса :

,

откуда , где  - радиус Земли;  - единичный вектор, направленный из точки  к центру Земли .

Элементарная работа центральной силы определяется по формуле , где  - проекция силы  на направление ;  - элементарное перемещение. Для выражения полной работы имеем

.

Знак «- «обусловлен тем, что проекция силы  на направление  отрицательна. Искомая работа равна .

Переходя к пределу при , находим

, .

Задача 12. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть упругую пружину на величину ?

Решение. Реакция  упругой пружины, один конец которой закреплен, выражается согласно закону Гука формулой , где  - коэффициент жесткости пружины,  - деформация.

Элементарная работа упругой силы (реакции пружины) при растяжении ее на величину  определяется по выражению

,

где  - элементарное перемещение, направленное в сторону, противоположную силе .

Полную работу найдем, проинтегрировав в пределах  полученное выражение:

 (ед. работы).

Коэффициент  можно найти, если будут заданы начальные условия,

Задача 13. Цилиндр радиуса  и длиной  заполнен паром под давлением . Какую работу надо затратить, чтобы уменьшить объем пара в два раза, считая, что температура пара остается постоянной?

Решение. Для изотермического процесса справедлив закон Бойля - Мариотта

,

где  - давление; - объем, заполненный газом;  - постоянная.

Величина изменения объема цилиндра на длину 

;

.

Элементарная работа  силы давления  при уменьшении длины цилиндра на  выражается формулой

, т.е.

.

Суммируя и переходя к пределу, получаем

.

Постоянную  можно найти по формуле , где  и  - первоначальные значения давления и объема.

Задача 14. Капля с начальной массой  падает под действием силы тяжести и равномерно испаряется, теряя ежесекундно массу, равную . Какова работа силы тяжести за время от начала движения до полного испарения капли? (Сопротивлением воздуха пренебрегаем).

Решение. Через  секунд от начала падения масса капли будет равна .

Найдем момент времени , когда капля полностью испарится, так как к этому моменту

, то

, т.е. .

Элементарная работа , совершенная силой тяжести за время , приближенно

,

где  - путь, пройденный каплей за время ;  - ускорение свободного падения;  - сила тяжести.

Считаем при этом, что за время  масса капли остается постоянной, равной массе капли в начальный момент . Величина , так как направление движения совпадает с направлением силы тяжести; учитывая, что  и то, что при отсутствии сопротивления , получаем

.

.

Единого подхода требуют также задача на вычисление работы, которую нужно произвести при откачивании жидкости из резервуаров различной формы, засыпании песка в виде кучи определенной формы и т.д.

Для решения таких задач следует разбить тело высотой  на  элементарных слоев и найти работу  , которую нужно затратить на поднятие  - го элементарного слоя на высоту . Просуммировав  и переходя к пределу при , найдем

.

Величину  определяем исходя из того, что работа равна произведению силы веса  элементарного слоя этого тела на высоту его поднятия :

,

где  - площадь элементарного слоя на высоте ;

 - толщина этого слоя;  - плотность материала, заполняющего слой. Таким образом, в случае однородного материала 

. (8)

Задача 15. Вычислить работу, которую необходимо затратить для того, чтобы выкачать жидкость плотностью , наполняющую цилиндрический резервуар высотой , имеющий в основании круг радиуса .

Решение. Разобьем цилиндр на элементарные цилиндры плоскостями, параллельными основанию, с высотой . Объем элементарного цилиндра

,

а его масса

.

Элементарная работа, затрачиваемая на поднятие этого слоя жидкости, находящегося на глубине :

.

Просуммируем и перейдем к пределу, тогда искомая работа

. (ед. работы)

Здесь  - ускорение свободного падения.

Задача 16. Какую работу нужно произвести, чтобы насыпать кучу песка в форме усеченного конуса высоты , имеющего радиусы оснований  и  ? Плотность песка равна , песок поднимают с поверхности Земли, на которой покоится большее основание конуса.

Решение. Следуя общей схеме, разобьем усеченный конус на элементарные слои. Положим, что элементарный слой имеет форму кругового цилиндра высотой  и радиуса . Тогда объем элементарного слоя

,

а масса песка, заполняющего этот слой:

.

Работа, затрачиваемая на поднятие одного слоя песка на высоту :

.

Выразим величину  через .

Из подобия треугольников  и  имеем

 или

, откуда

.

Тогда

,

а интегральная сумма

.

Задача 17. Размеры пирамиды Хеопса приблизительно таковы: высота м, ребро основания (квадрата) м. Плотность камня, из которого она сделана, приблизительно  г / . Вычислить работу, затраченную при ее постройке на преодоление силы тяжести.

Решение. Выделим элементарный слой пирамиды с высотой , принимая этот слой за прямую призму с площадью основания . Масса камня, заполняющего этот слой пирамиды, , а работа, необходимая для поднятия этого слоя на высоту ,

.

Величину  найдем из соотношения

; ; ;

.

Тогда

.

Суммируя и переходя к пределу, получаем работу

.

Учитывая, что  г /  кг / , и подставляя значения  и , получаем

 (ДЖ).

Задача 18. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать жидкость плотности  из резервуара, имеющего форму конуса, обращенного вершиной вниз, высота которого равна , а радиус основания . Как изменится результат, если конус будет обращен вершиной вверх?

Решение. Пусть конус обращен вершиной вниз.

Выделим элементарный слой, с высотой , полагая приближенно, что он имеет цилиндрическую форму. Элементарная работа, затрачиваемая на поднятие жидкости, заполняющей выделенный слой,



( - величина элементарного объема,  - высота поднятия).

Из геометрических соображений

; .

Тогда

,

.

И, наконец,

.

Обратимся ко второму случаю, когда вершина конуса обращена вверх,

Рассуждая аналогично предыдущему случаю, получаем приближенное выражение для элементарной работы

,

а из геометрических соображений имеем:

; .

Тогда

,



.

Задача 19. Котел имеет форму параболоида вращения. Радиус основания , глубина котла . Он наполнен жидкостью, плотность которой . Вычислить работу, которую нужно произвести, чтобы выкачать жидкость из котла.

Решение. Следуя общей схеме, выделяем элементарный слой с высотой , элементарная работа, затрачиваемая на поднятие жидкости, заполняющей выделенный слой, на высоту 

.

Зависимость  от  найдем, принимая во внимание, что уравнение кривой, которая получается в осевом вертикальном сечении данного котла:

,

а так как точка  принадлежит этой кривой, то , и, следовательно,

 и .

Поэтому



и .