Министерство образования и науки Российской Федерации

Институт математики, естествознания и техники

Кафедра математики и методики её преподавания

***Курсовая работа***

***Различные определения интеграла Римана и их сравнения***

***Елец - 2015***

***Содержание***

Введение

§1. Определение интеграла как предела интегральных сумм Римана

§2. Определение интеграла как единственного числа, разделяющего верхние и нижние суммы Дарбу

§3. Определение интеграла от непрерывной функции как приращение первообразной (формула Ньютона-Лейбница)

§4. Равносильность "первого", "второго" и "третьего" определений интеграла Римана

Заключение

Список литературы

***Введение***

Целью данной работы является анализ различных определений интеграла Римана, их сопоставление, сравнение, выявление общего и различного.

Задачи, которые нужно выполнить для достижения цели: изучить множество литературы по этой теме, отобрать из изученного материла необходимый; привести примеры использования интеграла Римана.

Иоганн Кеплер (1571-1630), Бонавентура Кавальери (1598-1647), Эванжелиста Торричелли (1608-1647) и Блез Паскаль (1623-1662) в своих трудах развивали методы, которые привели к созданию интегрального исчисления в великих творениях Исаака Ньютона (1643-1727) и Готфрида Вильгельма Лейбница (1646-1716).

Огюстен Луи Коши (1789-1857) дал определение интеграла как предела интегральных сумм и доказал существование интеграла от непрерывной функции. Для более широких классов функций определения интегралов дали Георг Фридрих Бернгард Риман (1826-1866), чье имя носит определенный интеграл (интеграл Римана), а затем Жан Гастон Дарбу (1842-1917) и Камиль Мари Эдмон Жордан (1838-1922). Дальнейшее развитие понятие интеграла получило в трудах Томаса Стилтьеса (1856-1894) и Анри Луи Лебега (1875-1941).

Георг Фридрих Бернхард Риман (17 <https://ru.wikipedia.org/wiki/17\_%D1%81%D0%B5%D0%BD%D1%82%D1%8F%D0%B1%D1%80%D1%8F>.09.1826-20.07.1866 <https://ru.wikipedia.org/wiki/20\_%D0%B8%D1%8E%D0%BB%D1%8F>) - немецкий <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B5%D1%80%D0%BC%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%8F> математик <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0>, механик <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%85%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B0> и физик. За свою короткую жизнь (всего 10 лет трудов) он преобразовал сразу несколько разделов математики. "Мы склонны видеть в Римане, может быть, величайшего математика середины XIX века, непосредственного преемника Гаусса <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B0%D1%83%D1%81%D1%81,\_%D0%9A%D0%B0%D1%80%D0%BB\_%D0%A4%D1%80%D0%B8%D0%B4%D1%80%D0%B8%D1%85>", - отмечал академик П.С. Александров <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%B0%D0%BD%D0%B4%D1%80%D0%BE%D0%B2,\_%D0%9F%D0%B0%D0%B2%D0%B5%D0%BB\_%D0%A1%D0%B5%D1%80%D0%B3%D0%B5%D0%B5%D0%B2%D0%B8%D1%87> [1].

Понятие интеграла Римана, известное из элементарного курса анализа, применимо лишь к таким функциям, которые или непрерывны, или имеют "не слишком много" точек разрыва. Для измеримых функций, которые могут быть разрывны всюду, где они определены (или же вообще могут быть заданы на абстрактном множестве, так что для них понятие непрерывности просто не имеет смысла), римановская конструкция интеграла становится непригодной.

интеграл риман приращение первообразная

# ***§1. Определение интеграла как предела интегральных сумм Римана***

Разбиением множества Mпринято называть совокупность его подмножествсо свойствами:

) ;

) .

В дальнейшем роль множества Mу нас будет играть промежуток , а разбиения мы будем рассматривать только некоторого специального типа. А именно, на  мы будем выбирать точки так, чтобы

.

Этой совокупности точек, вообще говоря, можно сопоставить несколько различных разбиений, например, два таких:





(очевидно, можно предложить и другие, поменяв местами круглую и квадратную скобки у некоторых соседних промежутков).

Поскольку все величины, вводимые ниже, не будут зависеть от способа расстановки круглых и квадратных скобок в таких разбиениях, обычно любое из таких разбиений отождествляют с совокупностью точек . Мы так и будем делать в дальнейшем, а чтобы отличать подобного типа разбиения от произвольного множества точек , в котором точки никак не связаны между собой, будем обозначать их символом.

**Определение 1.1** *Пусть функция fзадана на отрезке* *. Тогдадля неё вводятся следующие объекты:*

*)*  *- разбиение отрезка**;*

*)*  *- отрезок разбиения* *;*

*)*  *- длина отрезка разбиения* *;*

*)*  *- мелкость разбиения* *;*

*)* *, где*  *- выборка, соответствующая разбиению* *;*

*)*  *- интегральная сумма Римана, соответствующая разбиению*  *и выборке* *.*

**Определение 1.2.** *Пусть функция f задана на отрезке* *. Число Iназывается* ***пределом интегральных сумм****при мелкости разбиения* *, cтремящейся к нулю, когда выполняется условие:*

*для любого*  *найдется такое* *, что для любого разбиения*  *с мелкостью*  *для любых выборок*  *выполняется неравенство**.*

В краткой символической форме то же самое можно записать так:

.

**Определение 1.3.** *В случае, когда существует конечный предел Iинтегральных сумм Римана, говорят, что функция f интегрируема по Риману на отрезке* *, а сам этот предел обозначают*  *и называют (****определённым) интегралом Римана*** *(от функции f по отрезку* *).*

Иногда, желая подчеркнуть, что речь идет именно о римановом интеграле, пишут.

**Замечание 1.1.** В соответствии с общими принципами определения предела отметим, что

.

Множество всех интегрируемых по Риману функций на отрезке  обозначается.

Докажем необходимое условие интегрируемости:

**Теорема 1.1.** *Если функция f интегрируема по Риману на отрезке* *, то она ограничена на этом отрезке.*

**Доказательство.** Пусть функция f интегрируема по Риману на отрезке  и . По определению интеграла для найдётся такое, что для любого разбиения  с мелкостьюи для любой выборки  будет выполняться неравенство . Фиксируем разбиение , для которого выполнены неравенства

.

Предположим противное: Если функция f не ограничена на отрезке , то для этого разбиения найдётся хотя бы один отрезок , на котором она будет не ограничена. Фиксируем все точки при и рассмотрим интегральную сумму



как функцию. Так как  не ограничена на , очевидно, будет не ограничена и вся сумма . А это противоречит неравенствам . Полученное противоречие доказывает теорему. Подчеркнём, что ограниченность функции f является только необходимым условием интегрируемости по Риману, но не является достаточным. Вот простой пример ограниченной функции, не являющейся интегрируемой по Риману.

Пусть

 - функция Дирихле.

Очевидно, она ограничена: . Покажем, что она не интегрируема по Риману на отрезке . В самом деле для любого разбиения , делая выборку так, чтобы все  были рациональны (это всегда можно сделать!), получим, что

,

а для выборки в которой все иррациональны (такая выборка тоже всегда возможна), получим



Поэтому не существует числа , для которого независимо от выборки  выполнялось бы неравенство . А это противоречит

определению интегрируемости по Риману.

**Пример 1.1** Задача (Демидович, № 2185). Вычислить интеграл .

**Решение.** У нас  - непрерывная функция, поэтому, для вычисления данного интеграла можно выбрать произвольную последовательность разбиений и соответствующих выборок , лишь бы мелкость  стремилась к нулю, соответствующая последовательность интегральных суммобязана стремиться к значению интеграла.

Выберем в качестве разбиения  разбиение отрезка на n равных частей. Тогда, очевидно, будем иметь . Далее,

.

Выберем . Тогда







Таким образом, .

**Пример 1.2** Вычислить интеграл

.

**Решение.**



Доопределив эту функцию в точке , например, по непрерывности, т.е. полагая , мы получим , и, следовательно, искомый интеграл равен .

***Свойства интеграла Римана*:**

*1) Невырожденность:*

.

*2) Положительность:*

Если интегрируемая функциянеотрицательна, то её интеграл на отрезке также неотрицателен.

*3) Линейность:*

Если функции интегрируемы, и , то функция тоже интегрируема, и.

*4) Непрерывность:*

Если интегрируемые функцииравномерно сходятся <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%BD%D0%B0%D1%8F\_%D1%81%D1%85%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D0%BC%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C> на отрезкек функции , то интегрируема, и.

*5) Аддитивность при разбиениях отрезка:*

Пусть . Функция  интегрируема на отрезке , тогда и только тогда, когда она интегрируема на каждом из отрезков  и , при этом

.

6) Непрерывная на отрезке функция интегрируема по Риману (следствие свойств 1-5). Разрывные функции могут быть как интегрируемы, так и не интегрируемы.

Примером функции, не интегрируемой по Риману, является всюду разрывная функция Дирихле. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману: функция интегрируема по Риману на отрезке, если и только если на этом отрезке она ограничена, и множество точек, где она разрывна <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%BE%D1%87%D0%BA%D0%B0\_%D1%80%D0%B0%D0%B7%D1%80%D1%8B%D0%B2%D0%B0>, имеет нулевую меру <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%80%D0%B0\_%D0%9B%D0%B5%D0%B1%D0%B5%D0%B3%D0%B0> (то есть может быть покрыто счётным <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%87%D1%91%D1%82%D0%BD%D0%BE%D0%B5\_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE> семейством интервалов <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%B2%D0%B0%D0%BB\_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)> со сколь угодно малой суммарной длиной).

) Если функция является первообразной <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B5%D1%80%D0%B2%D0%BE%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%BD%D0%B0%D1%8F> непрерывной функции, то интеграл функции на отрезке может быть вычислен по формуле Ньютона-Лейбница <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB%D0%B0\_%D0%9D%D1%8C%D1%8E%D1%82%D0%BE%D0%BD%D0%B0-%D0%9B%D0%B5%D0%B9%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D1%86%D0%B0>: он равен. (Это - общее свойство любых интегралов, удовлетворяющих свойствам 1-5, а не только интеграла Римана). Непрерывная на отрезке функция всегда имеет первообразную, и каждая первообразная имеет вид: , где  - произвольная константа <https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%BE%D1%8F%D0%BD%D0%BD%D0%B0%D1%8F>.

Интегральные суммыне являются ни последовательностью (хотя присутствует как количество точек разбиения, но уж слишком много различных разбиений можно предложить при одном и том же количестве точек ), ни функцией какого-нибудь действительного числа.

Рассмотрим множество  всевозможных разбиений c фиксированными в них выборками . 

Таким образом, мы считаем пары и  разными элементами множества , когда отличаются друг от друга или первые или вторые элементы этих пар или те и другие одновременно. На множестве  имеется "естественный" фильтр , базис которого составляют множества , (проверка того, что  - это действительно базис некоторого фильтра, который мы обозначили через , остаётся в качестве упражнения). Если мы фиксируем функцию , то интегральную сумму  можно рассматривать как функцию, определённую на множестве , и принимающую значения в множестве всех действительных чисел

: .

Предел именно этой функции по фильтру  и называют пределом интегральных сумм при мелкости разбиения, стремящейся к нулю, а если он существует и конечен, то интегралом (Римана) от функции по промежутку

,.

**Замечание 1.2.** Чтобы не вводить новых букв, очень часто фильтр  (или его базис) обозначают через . При таких обозначениях запись "стандартного" определения интеграла в точности совпадает с приведённым выше:

.

# ***§2. Определение интеграла как единственного числа, разделяющего верхние и нижние суммы Дарбу***

**Определение 2.1** *Пусть функция**определена на отрезке*  *и задано разбиение*  *отрезка* *. Определим:*

*,* 

***Нижней и верхней интегральными суммами Дарбу*** *функции* *на**, отвечающими разбиению*  *называются соответственно:*

*,* *.*

**Лемма 2.1** *Если функция*  *ограничена снизу на* *, то для любого разбиения* *-* *. Если функция*  *неограниченна снизу на* *, то для любого разбиения*  *-* *.*

**Доказательство.** Пусть  - разбиение отрезка . Если  ограничена снизу, то , следовательно, . Если  неограниченна снизу, то она неограниченна снизу на некотором отрезке , следовательно,  и .

**Лемма 2.2** *Если функция*  *ограничена сверху на* *, то для любого разбиения* *-* *. Если функция*  *неограниченна сверху на* *, то для любого разбиения*

 *-* *.*

**Доказательство.** Лемма 2.2 доказывается аналогично.

***Свойства сумм Дарбу*:**

*1) Для любой выборки* и разбиениясправедливы неравенства

.

**Доказательство**.

Так как выполняются неравенства . Домножим все части на.

Получим:

, .

Перейдя к сумме в каждой части неравенства, получаем:

,

где , , .

Согласно определению сумм Дарбу и интегральной суммы , утверждения и  равносильны.

*2) При*  - фиксированном, справедливы равенства , .

**Доказательство**. Докажем первое равенство. Необходимо показать, что  - минимальный предел верхних границ для интегральной суммы, т.е. нужно показать следующее:

.

Так как , то 



,.

Домножим на : 

Проссумируемые элементы:





Неравенства ,  и  равносильны.

Получили, что  - минимальный предел верхних границ для интегральной суммы . Второе утверждение доказывается аналогично.

*3) Существуют числа* *,* *, называемые верхним и нижним интегралами Дарбу, такие, что для любых разбиений*  *отрезка* : .

**Доказательство**. Существуют  *и* *, такие что для всевозможных разбиений отрезка*  и для любых разбиений  *выполняется неравенство:* .

**Пример 2.1** Найти суммы Дарбу для функции на отрезке , соответствующие разбиению этого отрезка на частей.

**Решение.**

В этом случае , , . В силу непрерывности и возрастания этой функции при любом разбиении отрезка она достигает наименьшего  и наибольшего  значений на левом и правом концах частичного отрезка  соответственно. Согласно формулам, находим:

, 

Принимая во внимание, что ,,, в итоге получаем:

, .

Ответ: , .

**Пример 2.2** Для интеграла  найти верхнюю и нижнюю интегральные суммы, соответствующие разбиению отрезка  на 3 равные части.

Решение. На отрезке  функция  монотонно возрастает, и поэтому для этого отрезка имеем , .

На отрезке  наименьшим значением функции является , а наибольшим .

На отрезке  функция монотонно убывает, и поэтому:

, .

Так как все  равны , то

, .

Ответ: , .

# ***§3. Определение интеграла от непрерывной функции как приращение первообразной (формула Ньютона-Лейбница)***

**Определение 3.1** *Функция*  *называется* ***первообразной*** *функцией* *на**, если* *, а на концах отрезка*  *значения функции*  *равны односторонним производным функциям* *:*

*,*

*.*

**Теорема 3.1** *Если функция*  *непрерывна на* *, то функция*  *является первообразной функции* *на**.*

**Доказательство**. Пусть .

Тогда

.

Следовательно,



.

В силу непрерывности функции на

*,*

поэтому



то есть , где при  имеется в виду предел справа, а при  - предел слева.

Это означает, что . Таким образом, функция  является первообразной функции на.

**Следствие 3.1** *Любая первообразная непрерывной на*  *функции*  *имеет вид* *, где*  *- произвольная константа*.

**Следствие 3.2 (**Формула Ньютона-Лейбница) *Если*  *- первообразная непрерывной на*  *функции* *, то* 

**Доказательство**. Воспользуемся следствием 1 и заметим, что

*.*

Следовательно, .

**Теорема 3.2 (**Замена переменной) *Пусть функция**имеет непрерывную производную на отрезке* *, а функция*  *непрерывна на отрезке* *. Тогда* *.*

**Доказательство.**

Поскольку функция  непрерывна на отрезке , то по теореме 3 существует первообразная для функции :

.

По формуле Ньютона-Лейбница:

.

Поскольку , то функция  является первообразной функции .

Следовательно, по формуле Ньютона-Лейбница:





**Теорема 3.3 (**Интегрирование по частям) *Если функции**и*  *непрерывно дифференцируемы на* *, то*

*.*

**Доказательство.**

Пользуясь линейностью интеграла и формулой Ньютона-Лейбница, получаем:



, откуда следует доказываемое равенство.

**Теорема 3.4 (**Интегральная теорема о среднем) *Если функции**и*  *непрерывны на*  *и* *, то существует точка*  *такая, что* *.*

**Доказательство.** Поскольку функции  и  непрерывны, то по теореме 3 существуют дифференцируемые на  функции и :

, , .

По теореме Коши о среднем:

.

Так как по формуле Ньютона-Лейбница

,

, то.

**Пример 3.1** Вычислить значение определенного интеграла  по формуле Ньютона-Лейбница.

**Решение.** Для начала отметим, что подынтегральная функция  непрерывна на отрезке , следовательно, интегрируема на нем.

Для функции  множество первообразных для всех действительных значений аргумента записывается как . Возьмем первообразную при : .

Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла:

.

Ответ: .

**Пример 3.2** Вычислить определенные интегралы и .

**Решение.** На отрезке  подынтегральная функция непрерывна, следовательно, интегрируема.

Найдем множество первообразных функции :

.

Возьмем первообразную и по формуле Ньютона-Лейбница вычислим требуемый определенный интеграл:



.

Переходим ко второму определенному интегралу.

На отрезке  подынтегральная функция не ограничена, так как , то есть, не выполняется необходимое условие интегрируемости функции на отрезке.  не является первообразной функции  на отрезке , поскольку точка , принадлежащая отрезку, не входит в область определения функции. Следовательно, не существует определенный интеграл Римана и Ньютона-Лейбница для функции  на отрезке .

# ***§4. Равносильность "первого", "второго" и "третьего" определений интеграла Римана***

**Теорема 4.1** *Если функция*  *интегрируема по Риману, то для любой последовательности разбиений*  *отрезка* *такой, что*  *при* *, и любой последовательности выборок* *соответствующих разбиениям* *, последовательность интегральных сумм**имеет предел равный* *.*

**Доказательство.**

По условию функция f интегрируема по Риману на. Пусть.

По определению для любого  найдется такое , что для любого разбиения  с мелкостью  для любой выборки  выполняется неравенство .

Но у нас по условию теоремы при. Поэтому найдётся такое N, что при всех будет выполняться неравенство.

Но тогда для любой выборки 



Таким образом, для произвольного, мы нашли такое N, что при всехвыполняется неравенство . Это и означает, что

.

**Теорема 4.2** *Если интеграл Римана и определенный интеграл Ньютона-Лейбница функции*  *существуют одновременно, то они равны друг другу.*

**Теорема 4.3** *Для ограниченной функции*  *интегралы Римана и Дарбу эквивалентны, то есть они существуют или не существуют одновременно, а в случае существования их значения совпадают.*

**Теорема 4.4** *Пусть на отрезке*  *задана интегрируемая по Риману функция* *. Тогда функция*  *непрерывна на**.*

**Доказательство.** В силу необходимого условия интегрируемости функцияограничена на , то есть .

Пусть . В силу свойства аддитивности интеграла относительно отрезков интегрирования . По теореме об интегрировании неравенств . Следовательно,  *,* то есть функция  непрерывна на.

# ***Заключение***

Интеграл, который мы рассмотрели в данной работе, был введен Бернхардом Риманом в 1854 г., и является одной из первых формализаций понятия интеграла и одним из важнейших понятий математического анализа.

Трудно назвать научную область, в которой бы не применялись методы интегрального исчисления, в общем, и свойства определенного интеграла, в частности. Также определенный интеграл используется для изучения собственно самой математики. Например, при решении дифференциальных уравнений, которые в свою очередь вносят свой незаменимый вклад в решение задач практического содержания. Можно сказать, что определенный интеграл - это некоторый фундамент для изучения математики. Отсюда и важность знания методов их решения.

Но вычисление определенных интегралов через предел интегральных сумм связано с большими трудностями. Поэтому самым простым и удобным методом вычисления определенного интеграла является формула Ньютона-Лейбница.

# ***Список литературы***

1) Клевчихин, Ю.А. Лекция 4. Определение интеграла Римана - Владивосток, 2005. - 9 с.

2) Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 3 - Москва, 1966 - 662 с.

) Кудрявцев, Л.Д. Математический анализ. Том 2 - М.: Высшая школа, 1970. - 424 с.

) Иванов, Г.Е. Лекции по математическому анализу. Часть 1 - МФТИ, 2000. - 359 с.

5) Свободная энциклопедия Википедия, статья "Риман, Бернхард". Web: https: // ru. wikipedia.org/wiki/Риман,\_Бернхард <https://ru.wikipedia.org/wiki/Риман,\_Бернхард>

) Свободная энциклопедия Википедия, статья "Интеграл Римана". Web: https: // ru. wikipedia.org/wiki/Интеграл\_Римана <https://ru.wikipedia.org/wiki/Интеграл\_Римана>

) Математический форум MathHelpPlanet, статья "Интеграл Римана". Web: http://mathhelpplanet.com/static. php? p=integral-rimana <http://mathhelpplanet.com/static.php?p=integral-rimana>

8) Савельев, Л.Я. Элементарная теория вероятностей. Интегралы Римана и Стилтьеса. Часть 3 - Новосибирск, 2005. - 200 с.