Содержание

Введение

Глава 1. Вспомогательные утверждения и конструкции

.1 Основные понятия и определения

.2 Банаховы функциональные пространства

.3 Функция Грина

.4 Задачи, сводящиеся к интегральным уравнениям

Глава 2. Постановка краевой задачи и исследование ее однозначной разрешимости и отрицательности функции Грина

.1 Признак существования решения краевой задачи для нелинейного функционально-дифференциального уравнения

.2 Исследование разрешимости краевой задачи

.3 Оценка нормы оператора

.4 Исследование отрицательности функции Грина

.5 Исследование разрешимости двухточечной краевой задачи

Заключение

Список использованных источников

## Введение

Математические методы являются важнейшим инструментом анализа экономических явлений и процессов, построение теоретических моделей, позволяющих отобразить существующие связи в экономической жизни, прогнозировать поведение экономических субъектов.

Математика как основа теории принятия решений широко применяется для управления (планирования, прогнозирования, контроля) экономическими объектами и процессами. В настоящее время методы математического моделирования находят все более широкое применение в решение прикладных экономических задач.

Современные модели содержат в себе как настоящие, так и предыдущие состояния описываемого объекта. Основными методами исследования являются методы общей теории линейных функционально-дифференциальных уравнений, а также конструктивные методы исследования краевых задач. Для отображения функционирования модели ставится краевое условие.

Объектом исследования данной работы является однозначная разрешимость линейно функционально-дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом и отрицательность функции Грина.

Целью работы является исследование однозначной разрешимости линейно функционально - дифференциальное уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом с однородными краевыми условиями и исследование отрицательности функции Грина. Для достижения поставленной цели решены следующие задачи:

) Введены необходимые понятия и утверждения теории функционального анализа

) Рассмотрена однозначная разрешимость нелинейной задачи

) Доказана однозначная разрешимость линейной задачи и отрицательность функции Грина

Структура работы. Работа условно разделена на 2 главы. В первой главе приводятся необходимые теоретические сведения из специальных разделов функционального анализа. Во второй главе рассматривается разрешимость нелинейного функционально-дифференциального уравнения и доказывается однозначная разрешимость линейной краевой задачи и отрицательность функции Грина.

# Глава 1. Вспомогательные утверждения и конструкции

## .1 Основные понятия и определения

. Множество X элементов любой природы называется линейным или векторным пространством, если

а) для любых 2-х элементов  ставится в соответствие элемент , который называется суммой взятых элементов и обозначается 

б) для любого элемента и ставится в соответствие элемент , который называется суммой взятых элементов и обозначается .

. пусть X линейное пространство. Конечный функционал называется нормой, если для любых 2-х элементов удовлетворяют аксиомы:

а)  

б) 

в) 

. Линейное пространство X, в котором определенна некоторая норма, называется нормированным пространством, норма обозначается .

. Если пространство X таково, что в нем каждая фундаментальная последовательность сходиться к элементу этого пространства, то оно называется банаховым или полным.

. пусть X -нормированное пространство. Множество называется относительно компактным, если произвольная последовательность этого множества содержит подпоследовательность, которая сходится к элементу пространства X.

. Множество  называется компакным, если оно относительно компактно и замкнуто.

. Оператор  называется ограниченным, если существует такая константа , такая что 

. Ядро линейного оператора называется множество 

. Образом оператора A называется множество  подпространство пространства Y.

. Совокупность  всех линейных непрерывных функционалов на банаховом пространстве X образует сопряженное к X линейное пространство.

. пусть X и Y - банаховы пространства, оператор  называется обратным к оператору , если  уравнение  однозначно разрешимо, и это решение представимо в виде 

. Число  называется собственным значением оператора A, если существует такой ненулевой собственный вектор ,



. Точка  называется регулярной, если оператор  непрерывно обратим. Совокупность регулярных точек называется резольвентным множеством, а оператор  резольвентой оператора A.

. Совокупность собственных значений оператора A называется спектром оператора A.

. Условие Каратеодори: функция  измерима при , и функция  непрерывна 

## 1.2 Банаховы функциональные пространства

Пространство L2[a,b].

Через L2=L2[a,b] обозначим совокупность всех классов интегрируемых функций по Лебегу с квадратом  с нормой  Это же пространство будет рассматривать как действительное гильбертово пространство со скалярным произведением, определяемым следующим образом:

 

Отметим, что норма, порождаемая этим скалярным произведением, совпадает с исходной нормой. [10]

Определение 1. Функция у(t) на [a,b] называется абсолютно непрерывной на [a,b], если для любого  найдётся такое  что для любой конечной системы непересекающихся интервалов  из отрезка [a,b] таких, что  имеет место неравенство



Через D2=D2[a,b] обозначим пространство абсолютно непрерывных функций  таких, что  Пространство D2[a,b] - является бахановым пространством относительно нормы  Пространство H=D2[a,b] можно рассматривать как гильбертово пространство со скалярным произведением, определяемым следующим образом:



Порождаемая норма этим скалярным произведением:



Нормы и эквиваленты, т.е. существуют такие константы С1>0, C2>0, что выполняется  .

Обозначим через C[a,b] пространство непрерывных на отрезке [a,b] функций  с нормой 

Обозначим через C1[a,b] пространство непрерывно - дифференцируемых на отрезке [a,b] функций  с нормой .

Справедливо следующее включение



Через W2=W2[a,b] [5,c.12] обозначим пространство абсолютно непрерывных на отрезке [a,b] функций  таких, что  с нормой



Пространство H=W2[a,b] можно рассматривать как гильбертово пространство со скалярным произведением, определяемым следующим образом:



Порождаемая норма этих скалярным произведением:



## 1.3 Функция Грина

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля.

Постановка: Найти те значения параметра , при которых уравнение

 (1)

имеет нетривиальное решение у (t)  CL2 [a, b], удовлетворяющее краевым условиям

, (2)

.

Краевые условия содержат параметры αi βi которые можно зафиксировать различным образом. Вследствие этого оператор L в (2.4) должен маркироваться в зависимости от значений α1, β1, α2, β2, (например,  ); с изменением этих значений меняется область определения оператора, а следовательно, и сам оператор. Задача Штурма - Лиувилля в зависимости от значений указанных параметров имеет ту или иную физическую подоплеку, ту или иную специфику. Если β1=β2= 0, то соответствующие условия

(t1)=0, y(t2)=0

именуются краевыми условиями первого рода; условия

'(t1)=0, y'(t2)=0,

называются краевыми условиями второго рода. Общие условия (2), записанные в виде

у' (а) - у (а) = 0, у' (а) - у (а) = 0,

называются краевыми условиями третьего рода. Все написанные условия есть однородные условия, поскольку в правой части стоит нуль. В более общем случае справа вместо нуля может стоять произвольное число, и тогда говорят о неоднородном краевом условии.

Задачу Штурма - Лиувилля называют также задачей на собственные значения[2,c.326]. Краевые условия (2.6) именуют граничными или предельными условиями (и тогда говорят о граничной или соответственно о предельной задаче).

Элементарным решением уравнения

 (3)

с особенностью в точке  называется функция , определенная в квадрате

 ={(t, );  }

и обладающая свойствами:

1.  (t, ) непрерывна в Q.

. При фиксированном  она удовлетворяет уравнению (3) в промежутках [а, ), и (, b] (и, следовательно,  дважды непрерывно дифференцируема в этих промежутках).

. Первая производная функции  имеет разрыв первого
рода в точке  со «.скачком» -1/р(), т. е.



Функцию  будем называть функцией Грина оператора L[2,c.332].

## .4 Задачи, сводящиеся к интегральным уравнениям

Можно считать общеизвестным, что обыкновенные дифференциальные уравнения играют исключительно важную роль как математические модели многих реальных явлений и процессов. Для дифференциального уравнения

  (1)

часто возникает так называемая начальная задача, или задача Коши,

(Lx)(t) = f(t), x(0) = α,

где требуется найти функцию x(t), удовлетворяющую уравнению (6) и дополнительному начальному условию x(0) = α. Используя подстановку

 (2)

, для z(t) получаем уравнение

 

которому можно придать вид

 (3)

где





Уравнение (3) называется линейным интегральным уравнением Фредгольма, а функция двух переменных K(t, s) - ядром этого уравнения. Для широкого круга прикладных задач возникает необходимость рассматривать краевую задачу [3, 4], представляющую собой систему

(Lx)(t) = f(t),  (4)

в которой второе уравнение принято называть краевым условием. В виде lx = α могут быть записаны самые разнообразные случаи краевых условий. В частности, при соответствующем выборе и ϕ в таком виде могут быть записаны: начальное условие

x(0) = α ( = 1, ϕ(s) ≡ 0);

периодическое условие

(T) = x(0) ( = 0, ϕ(s) ≡ 1, α = 0);

многоточечное условие

  i=1,2,…,m;

в этом случае

 

интегральное условие

 ( = T, ϕ(s) =T-s).

Можно свести задачу (4) к интегральному уравнению: по числу  и функции ϕ можно найти такую функцию u(t), что u(0)  0, lu = 1 и система уравнений

(t)+B(t)x(0)=z(t), lx= α

где B(t) = −u(t)/u(0), однозначно разрешима и ее решение имеет представление

 (5)

краевой задача грин функция

Здесь



Воспользуемся W-подстановкой (5) применительно к уравнению (1):

(t)+B(t)x(0)=-P(t)x(t)+B(t)x(0)+f(t).

Получаем уравнение



которое принимает вид (3), если положить K(t, s) = B(t)W(a, s) − P(t)W(t, s), g(t) = f(t) + B(t)u(0)α - P(t)u(t)α. Краевая задача (4) для дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом

  (6)

 при 

для интегродифференциального уравнения

  (7)

и многих других классов уравнений тоже сводятся к интегральному уравнению (3) с помощью W-подстановки (5)[6].

# Глава 2. Постановка краевой задачи и исследование ее однозначной разрешимости и отрицательности функции Грина

Рассматриваем вопрос об условиях однозначной разрешимости функционально-дифференциальное уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом и с однородными краевыми условиями:

 (1)

 (2)

Линейный ограниченный оператор , .

Функцию p(t) можно представить в виде разности 2-х функций,

,

 (3)

Благодаря равенству (3) исходная краевая задача (1)-(2) запишем следующим образом:





Рассмотрим вспомогательную задачу

 (4)



Теорема 1:

Если выполнены следующие условия:

. Краевая задача (4) однозначно разрешима и функция Грина на 

.  где



Тогда задача (1)-(2) однозначно разрешима и функция Грина отрицательна.

Доказательство:

Задача (1)-(2) эквивалента уравнению  (6), где



Нужно отметить, что уравнение (6) мы рассматриваем в пространстве , а решение задачи (1), (2) - элемент пространства  Тем не менее утверждение об эквивалентности верно, так как в силу свойств функции Грина значение оператора  на непрерывной функции является элементом из 

Уравнение (6) рассматриваем в пространстве непрерывных функций и , то получаем ряд Неймана[3,с.187].





Ряд Неймана сходится равномерно[3,c.189], его сумма представляет решение уравнения (6)

-доказали однозначную разрешимость.

Докажем, что функция Грина отрицательна:

- изотонный оператор

Предполагаем, что функция f(t) положительна, отрицательна из равенства (6), следовательно, функция z(t) отрицательная. Каждое слагаемое в ряде Неймана представляет отрицательно, из этого следует отрицательность решения уравнения (5):

 , предполагаем не отрицательность функции f(t), следовательно функция Грина отрицательна.

 Задача (1)-(2) однозначна разрешима и ее функция Грина отрицательна.

## 2.1 Признак существования решения краевой задачи для нелинейного функционально-дифференциального уравнения

Рассмотрим нелинейную краевую задачу:

 (1)

 (2)

Имеет место представление

 (3)

Оператор  - линейный ограниченный симметрический; имеет спектр в интервале ;  - положителен, т. е. для любого  имеет место неравенство

. (4)

Введем следующие обозначения: ;

,

где  - измеримая функция, обладающая свойством “независания”:



Рассмотрим краевую задачу (1), (2) в предположениях:

 - измеримая функция;

 : измерима по  при каждом  и непрерывна по  при почти всех , и для любого  найдется такая суммируемая с квадратом на  функция , что если , то ; существуют такие числа , ,

, что для почти всех  и для всех  имеют место неравенства: ; ,

где .

Решением задачи (1), (2) будем называть функцию , для которой выполнены условия (1) и, равенство из (2) выполняется почти всюду на .

Рассмотрим уравнение

, (5)

где оператор  определен равенством .

Лемма1.  является решением уравнения (5) тогда и только тогда, когда  является решением задачи (1),(2) .

Лемма1 позволяет свести вопрос о разрешимости задачи (1), (2) к изучению уравнения (5). Поэтому мы предварительно исследуем свойства оператора .

Пусть  - линейный ограниченный самосопряженный оператор,  - положительная константа.

Определение. Оператор  называется -монотонным[5,c.6], если для любых  имеет место неравенство .

Лемма2. Пусть существуют такие константы :

 

такие, что

1) п.в.  

2)  п.в. 

Тогда:

a) оператор  являются (U,1- m,2)- монотонным ) существует непрерывный обратный оператор , удовлетворяющий уравнению , где  (6)

Доказательство.

а) Если , то доказываемое непосредственно следует из свойств оператора 

Пусть . Обозначим. Тогда для любых  имеем

.

Ввиду условия 2) из последнего равенства следует

.



т.к , т.е 

Лемма3:









Отсюда ввиду предположений на m получаем выполнение условия а)

. (7)

 (8)

Этим доказано утверждение а).

б) Из (8), используя неравенство (4), получаем для любых 

Используя неравенство Гельдера[10,c.54] и неравенство (4), выводим отсюда

.

Из (9), используя равенство (4) получим  

Из последнего неравенства и теоремы следует существование обратного оператора .

Обозначим:

, ,  .

Из (9) имеем : .

Используя неравенство Гельдера и неравенство (4), выводим отсюда





 при  

Пусть  - непрерывный оператор.

Лемма4. Пусть: выполнены условия 1), 2) лемме2; для п. в.  ; оператор  удовлетворяет условию Липшица с константой , причем . Тогда существует непрерывный оператор , удовлетворяющий условию Липшица с константой .

Доказательство. Имеем для любых , применяя лемму 2, получаем:



 (9)

Отсюда по теореме [14] получаем непрерывную обратимость оператора . Из (7) для непрерывного оператора  имеем: для любых :  

Лемма 5. Для любого  выполняется неравенство

.

Теперь мы можем получить условия, при которых все решения задачи (1),(2) удовлетворяют априорной оценке, и, одновременно, сама задача (1), (2) однозначно разрешима.

Лемма 6. Пусть выполнены условия:

Существуют такие константы  , что:

) для любых , почти для всех  имеет место неравенство ;

) для любых , почти для всех  имеет место неравенство .

) выполнено неравенство ,

где 

Тогда краевая задача (1), (2) имеет решение , которое удовлетворяет оценке , и решение, удовлетворяющее такой оценке, единственно.

Доказательство. Обозначим .

Построим функции  следующим образом:

для всех  положим ;

 так: .

Обозначим , ,  и рассмотрим вспомогательное уравнение

 (10)

Из построения функции  ясно, что уравнение (10) на множестве  эквивалентно уравнению (5), множество  отображается оператором  в множество .

Т. к. ,  - измеримые множества, то для любых  имеем:

. Из построения оператора  получим

.

А также из построения оператора , условия 1) и теореме 6 получим

.

Т. к.  и ввиду леммы 4 из последних двух равенств получим

. (11)

 принадлежит пространству . Поэтому для однозначной разрешимости уравнения (10) достаточно показать обратимость оператора  и принадлежность решения  множеству .[4,c.128] Условия 1) и 2) теоремы 3 выполнены по построению функции . Ввиду (11) и того, что , оператор  удовлетворяет условию теоремы 5.

Итак, по лемме 4 оператор  непрерывен и

, или .

Отсюда ввиду условия 2) получим .

На этом доказательство закончено.

## 2.2 Исследование разрешимости краевой задачи

, , (4)

, .

 при почти всех , и введем обозначение



Теорема 3.[14,c.7] Пусть существуют такие константы   что:

 почти всюду на 

Тогда задача (4) однозначно разрешима.

.3 Оценка нормы оператора 

Для оценки  где

,

применим следующую лемму

Теорема 4:



где 

Доказательство:

Оператор Грина для задачи (4) представляет собой произведение 2-х непрерывных функций.

Из доказательства леммы4 следует, что норма оператора Грина удовлетворяет неравенству

 [14,c.5]





## 2.4 Исследование отрицательности функции Грина

Определим оператор  равенством

 (2.4.1)

Теорема 5. Пусть выполнены условия:

1) существуют такие константы   что :

 почти всюду на , для любого выполнено неравенство



Тогда функция Грина краевой задачи (1.4)  на 

Доказательство.

Рассмотрим вспомогательную задачу

 (2.4.2)

Краевая задача (4) эквивалентна уравнению

 (2.4.3)

в пространстве C, где оператор  определен равенством (2.4.1),  В силу условия  уравнение (2.4.1), а следовательно, и задача (1.4) однозначно разрешимы. Значит, решение задачи (4) имеет представление



При любом фиксированном  функция  является решением “импульсной” задачи



 



в пространстве функций , имеющих на  и  абсолютно непрерывную производную 1-го порядка. Эта задача эквивалентна уравнению

 (2.4.4)

в пространстве , где  - решение импульсной задачи









Таким образом, при фиксированном .

Для доказательства неравенства  на  воспользуемся Теорема 6 об уравнении с антитонным оператором [5,с. 23]. Сформулируем Теорема6 применительно к оператору .

Теорема 6. Пусть  вполне непрерывный, антитонный оператор. Пусть, далее, , , . Тогда уравнение (2.4.4) имеет решение , удовлетворяющее неравенствам

.

Условия указанной теоремы для уравнения (2.4.4) выполнены:  вполне непрерывен, как произведение вполне непрерывного оператора Грина, действующего из пространства  в пространство , на ограниченный оператор , определяемый равенством



Рассмотрим оператор следующего вида:

- вполне непрерывный, антитонный оператор.





Данный оператор отражает порядковый интервал в себя, следовательно, найдется такая неподвижная точка, что  - решение уравнения (2.4.4), при этом  при фиксированном s,  Доказали, что функция Грина отрицательна для задачи (4).

## 2.5 Исследование разрешимости двухточечной краевой задачи

Рассматриваем вопрос об условиях однозначной разрешимости функционально-дифференциальное уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом и с однородными краевыми условиями:

 (2.5.1)

 (2.5.2)

Линейный ограниченный оператор , .

Функцию p(t) можно представить в виде разности 2-х неубывающих функций, ,

 (2.5.3)

Благодаря равенству (2.5.3) исходное уравнение (1) запишем следующим образом:





Рассмотрим вспомогательную задачу

 (2.5.4)

 (2.5.6)

Теорема 7 :

Если выполнены следующие условия:

) существуют такие константы  , что:

 почти всюду на ,

) 

и оператор , определяется равенством

 (2.4.4)

для любого выполнено неравенство



) 

Тогда задача (1-2) однозначно разрешима и ее функция Грина отрицательна.

# Заключение

В дипломной работе рассмотрена краевая задача для функционально-дифференциального уравнения второго порядка с однородными краевыми условиями. По схеме Лихачевой Н.Н доказывается однозначная разрешимость линейной задачи и отрицательность функции Грина.

В зависимости от условий на коэффициенты p(t) и отклонение аргумента h(t) на основе указанной схемы получен признак однозначной разрешимости и отрицательности функции Грина такой краевой задачи. В работе используется метод монотонных операторов в банаховом пространстве.

# Список использованных источников

1. Абдуллаев, А.Р. Задача Коши для квазилинейного дифференциального уравнения нейтрального типа/ Абдуллаев, А.Р.., Неволина О.А. // Ярославский педагогический вестник.-2011.-№3.- C. - 7-13.

. Лизоркин, П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений: учеб.пособие/ П.И. Лизоркин.-М.:Изд-во Наука, 1981-381с.

.Рисс, Ф. Лекции по функциональному анализу: учеб.пособие/ Ф.Рисс, Б.Секефальви-Надь.-М.:Изд-во Мир, 1979.-587с.

. Куфнер, А. Нелинейные дифференциальные уравнения:учеб.пособие/ А.Куфнер, С. Фучик.-М.: Изд-во Наука, 1988-304с.

.Гусаренко, С.А. Оптимальное управление : Экстремальные и вариационные задачи: учебно-методическое пособие/ С.А. Гусаренко.-М.: Изд-во Перм.ун-т, 2001- 87с.

.Азбелев, Н.В. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений/ Н.В. Азбелев, В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматуллина.-М.: Наука,1991-280с.

. Азбелев, Н.В. Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения/ Азбелев Н.В, Максимов В.П., Симонов П.М. // Вестник Удмуртского университета.-2009.-№1.-С.-1-23.

. Симонов, В.П. Арифметика рациональных чисел и компьютерное исследование интегральных уравнений/ Симонов В.П// Соровский образовательный журнал.-1999.-№3.- C. -121-126.

. Колмогоров, А.Н./ Элементы теории функций и функционального анализа/ А.Н. Колмогоров, С.В.Фомин. М.: Наука.1981.С.-40-44.

. Люстерник, Л.А/ Элементы функционального анализа/ Л.А. Люстерник, В.И. Соболоев. М.:Наука. 1965.519С.

. Абдуллаев, А.Р./ О разрешимости квазилинейных краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений// Функционально-диффер. урав.меж-вуз.сб.науч.труд.- Пермь 1992. С.-80-87.

. Треногин, В.А/ Функциональный анализ.М.:Наука, 1980.С.-496.

. Хелемский, А.Я./ Лекции по функциональному анализу. М.: 2004.С.-212.

. Пушкарев, Г.А/ Разрешимость одной краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения второго порядка с нелинейностью/ Г.А.Пушкарев, Е.Ю. Воробьева // Молодой ученый. 2014.-№3.С.-18-23.