МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕСПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ НИЗАМИ

КУРСОВАЯ РАБОТА

по предмету

«Математический анализ»

на тему:

СХОДИМОСТЬ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ

Работу выполнила: студентка группы 305

физико-математического факультета

направления образования «5110100- Методика преподавания математики»

Давулова Сетора

Проверила: старший преподаватель кафедры «Математический анализ»

Латыпова А.Р.

Ташкент - 2015 год

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

# Введение

# . Условие сходимости положительного ряда

# . Обобщенные гармонические ряды или ряды Дирихле

# . Ряд, составленный из элементов геометрической прогрессии

# . Теоремы сравнения рядов

# . Признак Даламбера

# . Признак Раабе

# . Схема Куммера

# . Вывод признаков сравнения из схемы Куммера

# . Признак Бертрана

# Заключение

# Список литературы

**Введение**

Исследования Исаака Ньютона в области математики дали толчок к исследованиям рядов. В частности, открытие им бинома Ньютона. Он дал формулу без доказательства в 1676 году в первом своем письме к Ольденбургу, секретарю Лондонского королевского общества. Формула бинома для натуральных степеней была известна китайскими математиками еще в XIV веке, но Ньютон первым догадался применить ее для дробных и отрицательных степеней, в результате чего у него получились бесконечные ряды. Со времен Ньютона бесконечные ряды активно исследовались, но вплоть до XVIII века понятие сходимости ряда еще не было точно установлено. Например, Эйлер в статье «О расходящихся рядах» (1754-1755 гг.) называет ряд «сходящимся», если его члены стремятся к нулю, и «расходящимся» в противном случае, при этом он допускал, что такой ряд не всегда сходится к своей «сумме», которую он вычислял через преобразование ряда к функции. Некоторые видные математики того времени недооценивали значение расходящихся рядов. Так Даламбер в 1768 году высказал сомнение в отношении употребления расходящихся рядов. Это кончилось тем, что в течение первой половины XIX века расходящиеся ряды не употреблялись, главным образом из-за критических трудов Абеля и Коши, пока математика не развилась до того уровня, чтобы их принять.

Цели данной курсовой работы состоят в том, чтобы научится определять, является ли ряд положительным, определять его сходимость или расходимость, в некоторых случаях научиться находить его сумму.

А задачи курсовой работы состоят в изучении определения положительного ряда, рассмотрении рядов Дирихле, рассмотрении схемы Куммера для вывода из нее признаков сравнения ряда, изучении признаков Даламбера, Раабе и Бертрана.

теорема признак сравнение гармонический ряд

**1. Условие сходимости положительного ряда**

Определение 1. Числовой ряд называется положительным, если все его элементы не отрицательны.

Теорема 1. Последовательность частичных сумм положительного ряда монотонно возрастает.

Доказательство. Пусть дан положительный числовой ряд

 , где  . (А)

Рассматривается n-ная частичная сумма

, тогда

,

это значит, что последовательность частичных сумм монотонно возрастает.

Рассматривается основная в теории положительных рядов теорема.

Теорема 2. Необходимое и достаточное условие сходимости положительного ряда. Для того чтобы положительный ряд сходился, необходимо и достаточно чтобы последовательность частичных сумм была ограничена сверху.

Доказательство. Пусть дан положительный ряд

 , где  . (А)

1) Необходимость. Пусть ряд (А) сходится, тогда

.

Значит, данная последовательность частичных сумм ограничена сверху.

) Достаточность. Пусть последовательность частичных сумм *Sn* ограничена сверху, значит, на основании теоремы Вейерштрасса, такая последовательность имеет конечный предел. Отсюда ряд (А) сходится.

# Все признаки сходимости (и расходимости), в конечном счете, основаны на этой простой теореме. Но непосредственное ее применение лишь в редких случаях позволяет судить о характере ряда. В качестве примера применения данной теоремы могут служить ряды Дирихле.

# **2. Обобщенные гармонические ряды или ряды Дирихле**

Определение 2. Числовой ряд  называется гармоническим рядом, а числовые ряды , где , называются обобщенными гармоническими или рядами *Дирихле.*

Замечание 1. Название гармонического ряда связано с тем, что каждый его член, начиная со второго, является средним гармоническим для двух соседних. (Число *c* называется средним гармоническим чисел *a* и *b*, если **).**

1) Рассматривается гармонический ряд.

Имеет место очевидное неравенство:

**.**(1)

Если, отбросив первые два члена, остальные члены гармонического ряда разбить на группы по 2, 4, 8,…, 2k-1,… членов в каждой



то каждая из этих сумм в отдельности будет больше ; в этом легко убедиться, полагая в (1) поочередно *n* = 2, 4, 8, …, 2*k-1*, … Обозначили *n-*ную частичную сумму гармонического ряда через *Hn*; тогда, очевидно,

.

Отсюда следует, что частичные суммы не могут быть ограничены сверху: ряд имеет бесконечную сумму.

2) Рассматривается ряд Дирихле .

Он содержит в себе, как частный случай (при *s*=1), предыдущий ряд.

Так как при *s*<1 члены рассматриваемого ряда больше соответствующих членов ряда в примере 1, то, в этом предположении, частичные суммы и подавно не ограничены сверху, так что ряд расходится.

Остался случай, когда *s*>1; положили для удобства , где .

Аналогично (1), получается неравенство:

.(2)

Выделив, как и выше, последовательные группы членов:



с помощью (2) легко показать, что эти суммы соответственно меньше членов геометрической прогрессии

.

В таком случае ясно, что какую бы частичную сумму рассматриваемого ряда ни взять, она будет меньше постоянного числа



следовательно ряд сходится.

Примеры. Исследовать на сходимость ряды:

1) .

Этот ряд является рядом Дирихле с *s*>1, а, значит, ряд сходится.

2) .

Этот ряд также является рядом Дирихле с *s*<1, а потому расходится.

# **3. Ряд, составленный из элементов геометрической прогрессии**

Рассматривается ряд:

.(3)

Его членами являются элементы геометрической прогрессии. Записав частичную сумму ряда: , по известной формуле:

, свернули : .

Устанавливается сходимость ряда при различных q:

1) , т. е. .

2)  - ряд расходится.

)  или не существует.

Вывод. Ряд, составленный из элементов геометрической прогрессии, сходится при  и расходится при .

Примеры. Исследовать на сходимость ряды и в случае сходимости найти их суммы:

3) .

Данный ряд составлен из элементов геометрической прогрессии, ее знаменатель равен 2>1, поэтому ряд расходится.

4) .

Это опять же геометрический ряд, его знаменатель равен , а, значит, ряд сходится. Ищется его сумма:

.

**4. Теоремы сравнения рядов**

## Пусть даны два положительных ряда

 , где  , (А)

 , где  . (B)

Теорема 3. Признак сходимости положительных рядов. Если для , то из сходимости ряда (А) следует сходимость ряда (В), а из расходимости ряда (В) следует расходимость ряда (А).

Доказательство. 1) Пусть ряд (А) сходится, доказывается, что сходится и ряд (В).

Обозначили последовательность частичных сумм ряда (А), а - ряда (В). Так как ряд (В) сходится, то . Из условия  следует, что , отсюда следует, что ограничено сверху, а, значит, подпоследовательность частичных сумм имеет конечный предел, т. е. ряд (В) сходится.

) Пусть ряд (В) расходится, доказывается, что расходится и ряд (А).

Из расходимости ряда (В) следует, что монотонно возрастающая последовательность частичных сумм , т. е. . И так как , то из предельного перехода в неравенстве получается, что , т. е. ряд (А) так же расходится.

Замечание 2. Если условия  выполняется, начиная с некоторого номера, то признак сходимости остается в силе.

Замечание 3. Теорема 3 носит название «признак сравнения I».

Теорема 4. Если, хотя бы начиная с некоторого места (например, для ), выполняется неравенство:

, где,(4)

то из сходимости ряда (В) следует сходимость ряда (А), а из расходимости ряда (А) следует расходимость ряда (В).

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что неравенство (4) справедливо для всех значений  В таком случае имеет место:



Перемножив почленно эти неравенства, получится:



Пусть ряд (В) сходится; вместе с ним сходится ряд , полученный умножением его членов на постоянный множитель , а тогда, по признаку сравнения I, сходится и ряд (А), и т. д.

Примеры. Исследовать на сходимость ряды:

5) .

Данный ряд сравнивается с рядом , который сходится, как геометрический ряд со знаменателем меньше 1. Поскольку , то, по признаку сравнения I, сходится и данный ряд.

6) .

Данный ряд сравнивается с гармоническим рядом , который расходится. Так как , то, по признаку сравнения I, сходится и данный ряд.

7) .

Его сравнивали с рядом , который, очевидно, расходится. Обозначив , составили для них выражения:



Поскольку  и ряд  расходится, то, по теореме 4, расходится и данный ряд.

# **5. Признак Даламбера**

Пусть дан положительный ряд:

 , где  . (А)

Теорема 5. Если существует предел:

, (5)

то: 1) при  ряд (А) сходится, 2) при  ряд расходится.

Доказательство. Из равенства (5) на основании определения предела числовой последовательности следует, что для любого сколь угодно малого  существует , такой что для  выполняется неравенство:

. (6)

1) Пусть , тогда . Обозначили , тогда, начиная с номера , из неравенства (6) следует, что выполняются следующие неравенства:

(7)

Перемножили неравенства (7):

.(8)

Рассматриваются следующие числовые ряды:

,(9)

.(10)

Ряд (10) сходится как ряд, состоящий из элементов геометрической прогрессии, со знаменателем . Тогда из неравенства (8) следует, что, по признаку сравнения I, сходится и ряд (9).

Ряд (9) является N-ным остатком ряда (А), значит, сходится и ряд (А).

)Пусть , тогда ряд (А) расходится, так как  и, начиная с некоторого номера, , т. е. последовательность  монотонно возрастает, а, значит, . Отсюда следует, что ряд (A) расходится.

Замечание 4. При  признак Даламбера ответа на поставленный вопрос не дает, и ряд нужно исследовать с помощью других признаков.

Примеры. Пользуясь признаком Даламбера, исследовать сходимость рядов:

8) .





Отсюда, по признаку Даламбера, следует, что данный ряд сходится.

9) .





Отсюда, по признаку Даламбера, следует, что данный ряд сходится.

10) .





Отсюда, по признаку Даламбера, следует, что данный ряд расходится.

# **6. Признак Раабе**

Теорема 6. Если существует предел:

, (11)

то: 1) при  ряд (А) сходится, 2) при  ряд расходится.

Доказательство. Доказывается вспомогательное утверждение:

Утверждение 1. (12)



Доказательство. Рассматривается выражение :

.

Прологарифмировали обе части равенства:



Возвратились к пределу:











Из равенства (11), на основании определения предела числовой последовательности, следует, что для любого сколь угодно малого  существует , такой что для  выполняется неравенство:

,(13)

1) Пусть , тогда . Обозначили , тогда, начиная с номера , из неравенства (13) следует, что выполняется следующее неравенство:

.(14)

взяли любое число  . По (12), для достаточно больших  будет выполняться:



Отсюда, по (14), следует:

.

Справа - отношение двух последовательных членов ряда Дирихле при ; после применения теоремы 4 становится очевидной сходимость ряда (А).

) Пусть , тогда, аналогично пункту (1), из (13) следует неравенство:



Отсюда сразу нашли:



после применения к ряду (А) и ряду Дирихле теоремы 4 становится видна расходимость ряда (А).

Замечание 5. Признак Раабе значительно сильнее признака Даламбера

Замечание 6. При  признак Раабе ответа на поставленный вопрос не дает.

Примеры.

) Исследовать ряд с помощью признаков Даламбера и Раабе:







Признак Даламбера на вопрос о сходимости данного ряда ответа не дает. Исследуется ряд с помощью признака Раабе:



Получилась неопределенность типа , поэтому применили 1-е правило Лопиталя-Бернулли:



Рад расходится при , сходится при , а при  признак Раабе на вопрос о сходимости ответа не дает.

) Исследовать ряд с помощью признака Раабе:

.





Получилась неопределенность типа , но, прежде чем применить 1-е правило Лопиталя-Бернулли, находится производная от выражения , для этого оно логарифмируется и ищется производная от логарифма:



Теперь можно найти производную от выражения :

.

Возвратились к пределу. Применяется 1-е правило Лопиталя-Бернулли:





Рассматривается выражение . После применения к нему 1-го правила Лопиталя-Бернулли:





Отсюда следует, что:



Подставили это равенство в выражение:



Отсюда, по признаку Раабе, следует, что данный ряд расходится при , сходится при , а при  признак Раабе ответа на вопрос о сходимости ряда не дает.

# **7. Схема Куммера**

Теорема 7. Пусть  будет произвольная последовательность положительных чисел, такая, что ряд  расходится.

Если существует предел:

,(15)

то: 1) при  ряд (А) сходится, 2) при  - расходится.

Доказательство. Из равенства (15), на основании определения предела числовой последовательности, следует, что для любого сколь угодно малого  существует , такой что для  выполняется неравенство:

 (16)

1) Пусть , тогда . Обозначили , тогда, начиная с номера , из неравенства (16) следует, что выполняется следующее неравенство:



Умножая обе части этого неравенства на , получается:

,(17)

значит, .

Отсюда следует, что последовательность  монотонно убывает и, следовательно, стремится к конечному пределу (так как ограничена снизу нулем).

Итак, ряд  сходится, ибо его частичная сумма: , имеет конечный предел. Но тогда из неравенства (17), по признаку сравнения I, следует, что сходится ряд , а с ним и данный ряд (А).

2) При , аналогично пункту (1), при  выполняется неравенство:

)



Так как ряд  предположен расходящимся, то, по теореме 4, расходится и испытуемый ряд (А).

Замечание 7. Условие расходимости ряда  используется только для вывода признака расходимости, признак сходимости в этом условии не нуждается.

Замечание 8. Схема Куммера является общей схемой для получения конкретных признаков.

# **8. Вывод признаков сравнения из схемы Куммера**

1) Положили, что . Условие расходимости ряда  соблюдено. Получается



Перешли к пределам:



1) При ряд сходится.



2) При ряд



расходится.

Таким образом, был выведен признак Даламбера.

2) Положили, далее, . Ряд  расходится как гармонический. Отсюда следует:



Перешли к пределам:



1) При ряд сходится.



2) Приряд расходится.



Здесь получился признак Раабе.

# **9. Признак Бертрана**

Теорема 6. Если существует предел:

(18)

то: 1) при  ряд (А) сходится, 2) при  - расходится.

Доказательство. Доказывается с помощью схемы Куммера. Пусть .

Рассматривается ряд



Сопоставим его с рядом , который расходится, так как его частичная сумма  не имеет конечного предела. После применения формулы конечных приращений к функции  в промежутке  получается:



Отсюда, по признаку сравнения I, следует, что расходится и ряд

.

Тогда





) При









ряд сходится.

2) При









ряд расходится, ч и тр. д.

Замечание 9. Признак Бертрана чувствительнее признака Раабе. Эта цепь все более и более чувствительных (но и более сложных!) признаков может быть неограниченно продолжена.

Примеры. Исследовать на сходимость ряды.

13) 



Отсюда следует:









Рассматриваются пределы:



Отсюда, по признаку Бертрана, следует, что данный ряд расходится.

**Заключение**

Значения положительных рядов на практике очень велико. С их помощью можно находить приближенные значения функций, значения которых очень трудно или невозможно посчитать. Так, например, число *e* определяется пределом функции . Найти точное значение этого выражения невозможно, а искать приближенное значение неудобно, поэтому этот предел преобразуется в положительный сходящийся ряд . Искать приближенное значение этого ряда значительно проще, при этом значительно легче оценивать степень точности.

В данной курсовой работе были рассмотрены положительные ряды. Были рассмотрены и решены примеры, которые помогли закрепить материал и научится применять его на практике.

**Список литературы**

# 1.Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - М.: «Наука», 1969. - 440 с.

# .Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. - М.: «Наука», 1990. - 624 с.

# .Маркушевич А. И. Ряды: Элементарный очерк. - М.: Физматгиз, 1961. - 188 с.

# .Фихтенгольц Г. Н. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2. - М.: Физматгиз, 1959. - 808 с.