Содержание

Часть 1. Суммирование одинаковых степеней натуральных чисел

.1 Определение и постановка задачи

.2 Сумма n первых чисел натурального ряда

.3 Сумма квадратов n первых чисел натурального ряда

.4 Применение к определению площади сегмента параболы

.5 Сумма кубов n первых чисел натурального ряда

.6 Общий случай. Рекуррентная формула

.7 Выражение суммы k-х степеней n первых чисел натурального ряда через детерминант

.8 Формула Штерна

Часть 2. Бернуллиевы числа

.1 Некоторые свойства сумм Sk

Выражение суммы k-x степеней n первых чисел натурального ряда с помощью бернуллиевых чисел. Формула Моавра

.2 Сумма k-x степеней (n-1) первых чисел натурального ряда. Функция Бернулли

.3 Другой вид для Sk и формулы Моавра

.4 Представление бернуллиева числа в виде детерминанта

.5 Сумма степеней четных и нечетных чисел

.6 Знакопеременная сумма степеней

Список литературы

Часть 1. Суммирование одинаковых степеней натуральных чисел

.1 Определение и постановка задачи

Натуральным рядом чисел называется ряд последовательных целых положительных чисел, начиная от единицы, именно:

, 2, 3, 4, 5, 6, 7,...

Задача настоящей главы состоит в нахождении суммы одинаковых степеней чисел натурального ряда, т, е. суммы вида:

1k+2k+3k+...+nk (1)

где k - целое положительное число. Вначале будут даны элементарные методы суммирования отдельно для первых степеней, вторых, третьих и т. д. Затем будет дана рекуррентна формула, а также общее выражение суммы (1) с помощью детерминанта. Сумму (1) мы условимся обозначать через Sk, где значок k указывает, что мы имеем дело с k-ми степенями натуральных чисел. Таким образом мы можем написать

Sk=1k+2k+3k+ ... +nk. (2)

.2 Сумма n первых чисел натурального ряда

Поставим себе задачей найти сумму n первых чисел натурального ряда. Обозначим эту сумму через S1 Тогда будем иметь:

S1= 1+2 + 3 + ... + (n-2) + (n-1) + n. (1)

Напишем эту сумму в обратном порядке, а именно:

S1=n + (n-1) + (n-2) +... + 3+ 2 + 1. (2)

Сложим почленно выражения (1) и (2). Получим:

S1=(1+n]+[2+(n-1)]+[3+(n-2)]+ ... +[(n-2)+3]+[(n-1)+2]+[n+1] (3)

Легко видеть, что выражение, стоящее внутри каждой квадратной скобки, равно n+1. Таких скобок, очевидно, n. Следовательно, правая часть выражения (3) равна (n+1)n, и мы имеем:

2S1=(n+1)n, откуда S1=(n+1)n(4).

Можно дать другой способ вычисления S1, который затем будет проводиться также для суммирования квадратов, кубов и т. д. натуральных чисел. Чтобы найти сумму (1), будем исходить из известной формулы:

(x+1)2=x2+2x+1 (5)

Дадим х в этой формуле последовательные значения 1, 2,...,n-1, n. Тогда получим такую таблицу:

(6)

В этой таблице, как видим, n строк. Сложим почленно равенства (6), т. е. будем складывать числа по группам, группируя вместе числа, стоящие друг под другом. Будем иметь:

После приведения (подчеркнутых членов) справа и слева и введения обозначения Sslt получим:

(n+1)2=1+2S1+n или 2S,=(n+1)2-(n+1)=(n+1)n

Откуда

.3 Сумма квадратов n первых чисел натурального ряда.

Поставим себе задачей найти сумму квадратов л первых чисел натурального ряда: 12+22+32+…+(n-1)2+n2

Обозначив эту сумму через S2, будем иметь:

S2= 12 +22+32+…+(n-1)2+n2 (1)

Напишем известную из элементарной алгебры формулу разложения куба суммы двух членов:

(x+1)2=x3+3x2+3x+1 (2)

Будем теперь давать х в формуле (2) значения 1, 2,..., n-1, n. Получим такую таблицу из n строк:

 (3)

Сложим равенства (3) почленно, будем иметь:

После приведения (подчеркнутых членов) и введения обозначений S1 и S2 получим:

(n+1)3 = 1+3S2+3S1+n (4)

Чтобы получить отсюда S2, заменим S1 его значением (4) из предыдущего параграфа и решим уравнение (4) относительно S2.

Будем иметь постепенно:

S2=(n+1)3-(n+1)-(n)+1-3(n+1)n\2 Или 6S2=2(n+1)3-2(n+1)-3(n+1)n

Вынося n+1 за скобку и произведя необходимые преобразования, получим:

6S2 = (n + 1) (2n2+n) = (n+1) n (2n +1),

или окончательно:

S2=n(n+1)(2n+1)/6

Так, например, при n=10, S2=10\*11\*21/6=385. Мы имеем, следовательно:

2+22+32+42+52+62+72+82+92+102=385

Из формулы (5) можно вывести такое любопытное предложение арифметического характера: каково бы ни было целое положительное число n, произведение n(n+1) (2n+1) всегда делится на 6.

В самом деле, выражение

n(n+1)(2n+1)/6

равно S2, a S2 как сумма квадратов целых чисел есть число целое.

.4 Применение к определению площади сегмента параболы

Полученное выражение суммы квадратов я первых чисел может быть использовано при вычислении площади параболического сегмента. Возьмем уравнение:

y=x2 (1)

Начертим две прямые, пересекающиеся под прямым углом, Ох и Оу (черт. 1). Горизонтальную прямую Ох будем называть осью абсцисс, а вертикальную Оу - осью ординат. На оси абсцисс будем откладывать произвольные значения х (абсциссы), а на оси ординат значения у (ординаты), вычисленные по формуле (1), и будем строить точки, соответствующие парам чисел (x, у). Тогда получим такой график функции x2, как указано на чертеже. Полученная кривая называется параболой. Возьмем на параболе точку М с положительной абсциссой а. Опустив из М на ось Ох перпендикуляр МА, получим параболический сегмент ОАМ, где OA=а. Поставим задачу определить площадь этого сегмента. Для этого разделим OA на n равных частей; абсциссы точек деления, очевидно, будут:

 (2)

В точках деления восставим ординаты до пересечения с дугой ОМ параболы. Точки пересечения обозначим буквами m1, m2,…,mn-1. Из точек т1 т2,…,mn-1, М проведем прямые, параллельные оси абсцисс, до пересечения с продолженной предыдущей ординатой. Тогда получим n прямоугольников, выходящих за параболу, как указано на чертеже.

Рис. 1

Очевидно, что площадь параболического сегмента ОАМ приближенно равна сумме площадей n прямоугольников. Эту сумму обозначим через σn ; чем больше будет n, тем меньше будут прямоугольники и тем меньше будет отличаться σn от искомой площади сегмента параболы. Обозначая площадь сегмента ОАМ через S, мы скажем, что площадь S есть предел σn при n, стремящемся к бесконечности. Это можно записать так:

S=пред σn

n->∞

Наша задача сводится, таким образом, к вычислению σn.

Для вычисления σn заметим, что площадь каждого прямоугольника равна произведению основания на высоту. Основание каждого прямоугольника равно - a/n, так как мы делим отрезок OA, равный а, на n равных частей. Что касается высот прямоугольников, то они определяются по формуле (1), если туда вместо х подставлять значения абсциссы (2) точек деления и значение а абсциссы точки М. Сделав это, получим для высот прямоугольников соответственно значения:

(последнее число получается, если в уравнение (1) вместо х подставить а, абсциссу точки М). Соответственно этому площади наших прямоугольников получат такие выражения:

Величина σn равна сумме величин (5):

или, вынося за скобку a3/n3, будем иметь:

Воспользовавшись формулой (5), получим:

и окончательно:

Чтобы перейти теперь к пределу при n -> ∞, согласно формуле (3), мы должны разделить каждую скобку числителя правой части формулы (6) на n. Тогда представим σn в такой форме:

Когда n стремится к бесконечности, - 1/n стремится к нулю; полагая 1/n- равным нулю, получим:

Следовательно, окончательно имеем для площади параболического сегмента: S=a3/3

Таким путем была определена: площадь параболического сегмента сиракузским математиком Архимедом в III в. до н. э. Рассмотренный прием лежит в основе современного интегрального исчисления.

.5 Сумма кубов n первых чисел натурального ряда

Чтобы определить сумму кубов:

13 + 23 + 33 + ... + n3, (1)

которую обозначим через S3, будем исходить из формулы:

(x+1)4=x4 + 4x3+6x2+4x+1 (2)

которую легко проверить непосредственно. Дадим в этой формуле для х последовательно значения 1, 2, 3,..., n. Получим таблицу из я строк:

(3)

Сложим равенства (3) почленно. Получим:

После приведения вводя обозначения S1 , S2, S3, будем иметь:

(n+1)4 =n+1 + 4S3 + 6S2 + 4S1. (4)

Отсюда

4S3= (n+1)4 - (n+1)-6S2-4S1

Заменяя S1 и S2 их значениями, полученными в предыдущих параграфах, получим:

4S3 = (n+1)4- (n+1)-n(n+1)(2n+ 1)-2(n+1)n,

или, после очевидных упрощений:

S3 = (n + 1) n2 (n +1) = (n+ 1)2n2,

Отсюда

Или

Это и есть искомое выражение для суммы кубов. Так как

следовательно, такую формулу:

Итак, сумма кубов я первых натуральных чисел равна квадрату суммы я первых натуральных чисел.

Рассмотренный прием может быть применен и к нахождению суммы четвертых, пятых и т. д. степеней натуральных чисел, но мы не будем на этом останавливаться, а перейдем к общему случаю, т. е. к определению суммы k-х степеней натуральных чисел.

.6 Общий случай. Рекуррентная формула

Поставим теперь задачу определить сумму k-х степеней я первых чисел натурального ряда, т. е.

Для этого воспользуемся формулой бинома Ньютона, которую напишем так:

(2)

Будем давать х последовательные значения 1, 2, 3,..., n; получим такую таблицу из n строк:

Сложим почтенно эти равенства; будем иметь:

Делая приведение подчеркнутых членов и вводя обозначения: Sk, Sk-1, Sk-2,…, S2, S1 ,S0 = n, получим:

 (4)

или (5)

Это так называемая рекуррентная или рекурсионная формула. Зная S0, S1, S2,..., Sk-1, мы можем вычислить Sk.

.7 Выражение суммы k-х степеней n первых чисел натурального ряда через детерминант

Рекуррентная формула (5) предыдущего параграфа дает нам возможность получить непосредственное выражение суммы Sk с помощью детерминанта. Положим в этой формуле k равным k, k - 1, k - 2, k - 3,..., 2, 1, 0, тогда получим такие уравнения:

(1)

Уравнения (1) представляют систему k+1 уравнений с k+1 неизвестными Sk, Sk-1,..., S1 S0. Пользуясь правилом Крамера для решения системы линейных уравнений, будем иметь:

 (2)

Сделаем следующие замечания:

1. если в числителе к элементам первого столбца прибавить элементы последнего столбца, то детерминант сохранит свою величину.

2. Так как в детерминанте, стоящем в знаменателе, элементы по одну сторону главной диагонали равны нулю, то детерминант равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали. Замечая, что элементы, стоящие на главной диагонали, соответственно равны:

заключаем, что произведение их равно:

\*2\*3…k(k+ 1) = (k+1)

После указанных преобразований формула (2) примет вид:

(3)

Таково выражение сумм Sk через детерминант.

.8 Формула Штерна

Между суммами одинаковых степеней я первых чисел существуют некоторые Соотношения. Так, например, мы видели, что существует соотношение

S3 = S21

В дальнейшем мы получим и другие аналогичные соотношения. Штерн дал более общую формулу, из которой приведенное соотношение вытекает как частный случай. Формула Штерна такова:

(1)

Ее мы докажем с помощью метода математической индукции.

Полагая n = 1, видим, что все S1 ,S2k-1 ,S2k-3, S2k-5 сведутся, к первому члену, т. е. к единице. Мы будем, следовательно, иметь:

(2)

А эту формулу легко доказать непосредственно. В самом деле, имеем:

(3)

Полагая здесь X = 1, имеем:

(4)

Полагая далее х= -1, имеем:

Вычитая почленно (4) из (3), получим:

Сокращая правую и левую части формулы (5) на 2, будем иметь:

а это и есть формула (2).

Таким образом формула (1) верна для n= 1. Предположим, что формула (1) верна для некоторого n и докажем, что тогда она верна для n+1. Введем такое обозначение:

Мы имеем тогда:

Напишем эту формулу так:

(6)

Первый член правой части формулы (6), на основании формулы (1), которая предполагается правильней, равняется:

(7)

Вычислим второй член. Имеем на основании бинома Ньютона:

Вычитая почленно последнее равенство из предыдущего, имеем:

Остальные члены сокращаются.

Умножая обе части последнего равенства на (n+1)k/2, получим:

(8)

Таков второй член правой части формулы (6). Подставляя в фор. мулу (6) вместо первого и второго члена правой части их выражения (7) и (8), получим:

 (9)

Складывая члены, стоящие друг под другом в правой части формулы (9), и замечая, что

будем иметь:

(10)

А это есть формула (1) для сумм, состоящих из степеней первых n+1 чисел. Итак, предполагая, что формула (1) верна для сумм из n чисел, мы доказали ее справедливость для сумм из n+1 cлагаемых; но мы видели, что формула (1) верна для n = 1; следовательно, она верна вообще.

Итак, формула Штерна доказана

Часть 2. Бернуллиевы числа

.1 Некоторые свойства сумм Sk

В конце предыдущей главы мы дали выражение суммы k-x степеней n первых чисел натурального ряда в виде детерминанта (k+1)-го порядка. При большом значении k вычисление этого детерминанта приводит к длинным выкладкам. Поэтому надо искать другое выражение для Sk. Такое выражение было получено впервые Яковом Бернулли (1654-1705). В выражение, данное Бернулли, входят некоторые определенные числа, которые носят название чисел Бернулли. Займемся теперь отысканием выражения суммы Sk, заключающего бернуллиевые числа.

Мы имели такие равенства:

(1)

Мы видим, что указанные суммы представляют многочлены относительно я, причем сумма первых степеней есть многочлен второй степени, сумма квадратов есть многочлен третьей степени, сумма кубов есть многочлен четвертой степени и т. д. Кроме того, в выражении этих сумм отсутствует свободный член. Докажем, что Сумма k-x степеней n первых натуральных чисел выражается многочленом (k+1)й степени относительно n, в котором отсутствует свободный член. Для этого мы применим метод математической индукции. Воспользуемся рекуррентной формулой (5), приведенной в параграфе 6. Перенесем в ней все члены, кроме первого, направо; разложим (n+1)k+1 по биному Ньютона и заметим, что S0 = n. Получим (после очевидных сокращений):

 (2)

Из формулы (2) видно, что если S1,S2,..., Sk-1 -многочлены соответственно степеней 2,3,..., k относительно n, то Sk есть многочлен степени k+1. Заметим теперь, что если в многочлене относительно n отсутствует свободный член, то многочлен алгебраически делится на n, и обратно, если многочлен делится алгебраически на n то свободный член должен отсутствовать. Допустим теперь, что все суммы вплоть до Sk-1 делятся алгебраически на n. Тогда каждый член правой части формулы (2) делится на n, как видно из выражения (2). Следовательно, вся правая часть выражения (2) делится алгебраически на n. Поэтому и левая часть должна алгебраически делиться на n, т. е. (k+1/1)Sk должно алгебраически делиться на n. А так как (k+1/1) - коэфициент, не зависящий от n, то Sk должно делиться на n. Но S1, S2,S3, как мы видели, делятся алгебраически на n следовательно, также должны делиться алгебраически на n и S4 56,…,Sk. Итак, делится на п. Отсюда следует, что Sk выражается многочленом степени k+1 относительно n, в котором отсутствует свободный член.

.2 Выражение суммы k-x степеней n первых чисел натурального ряда с помощью бернуллиевых чисел. Формула Моавра

На основании того, что говорилось в прошлом параграфе, мы можем положить:

 (1)

где b0, b1, b2,…,bk - коэффициенты, не зависящие от n, но зависящие от k. Эти коэффициенты мы должны определить. Для этого заменим в равенстве (1) n на n-1. Получим:

(2)

Вычтем теперь почленно из равенства (1) равенство (2). Получим:

(3)

Раскрывая по биному Ньютона выражения, стоящие внутри квадратных скобок, делая приведение их и располагая правую часть по степеням n, т. е. по nk, nk-1,...,n, получим в правой части (3) многочлен, расположенный по степеням n. Равенство (3) примет такой вид

(4)

где A1, A2,...,Ак - коэффициенты, которые мы не вычисляем, так как они нам не понадобятся. Равенство (4) есть тождество, справедливое для всякого n. Чтобы определить коэффициент b0, поступим так. Разделим все члены тождества (4) на nk . Получим:

(4')

Пусть теперь n стремится к бесконечности; тогда все члены правой части (4'), кроме первого, стремятся к нулю и в пределе равенство (4') превратится в такое:

=b0(k+1), откуда имеем: b0=1/k+1

Что же касается других коэффициентов b1, b2, b3, b4,…,bk, то заметим, что все они зависят от k. Введем вместо них другие коэффициенты В1, B,..., Bk с помощью следующих равенств:

(6)

Внесем теперь значения (5) и (6) для коэффициентов b0, b1, b2, bb..., bk в формулу (1). Получим:

(7)

Для получения формулы, которая связывает коэффициенты B1, B2, B3,..., Bk, положим в формуле (7) n-1. Получим:

 (8)

Мы напишем эту формулу в несколько ином виде. Для этого положим в формуле (1) n=1, k-1. Тогда согласно (5) b0=1/2. Формула (1) примет вид:

=1/2+b,

отсюда = у, и следовательно (так как Ь1= -B1): B1= -1/2

Перенеся единицу в правую часть формулы (8), получим:

Заметим, что так как

то

тогда формула (8') примет вид:

(9)

Формула (9) называется формулой Моавра. Это - рекуррентная формула; она дает возможность вычислять последовательно коэффициенты B1,В2,B3... Коэффициент B1 мы вычислили, - он равен -1/2 . Положим теперь в формуле (9) последовательно k = 2, 3, 4,...

Будем иметь:

Отсюда

Отсюда B3=0

Продолжая также далее, будем иметь:

Эти коэффициенты называются бернуллиевыми числами по имени математика Якова Бернулли, введшего их впервые в науку.

Это - рациональные числа. Мы видели, что В3 и В5 равны нулю. Можно показать, что все бернуллиевы числа с нечетными указа- тетями, кроме В{, равны нулю. Бернуллиевы числа обладают многими интересными свойствам которые мы изучим в дальнейшем.

Формула (7) дает общее выражение для суммы Sk при помощи бернуллиевых чисел. Если положить 1, 2, 3, то получим частные случаи, рассмотренные раньше.

С помощью формулы Моавра (9) мы можем вычислить бернуллиевы числа до любого индекса. Приведем значения первых 14 бернуллиевых чисел:

. Сумма k-x степеней (n-1) первых чисел натурального ряда. Функция Бернулли.

Кроме суммы:

часто рассматривают сумму:

 (1)

Выражение суммы (1) получится, если в формуле (7) § 2 перенести

член nk в правую часть. Получим:

(2)

так как

и формула (2) примет вид:

 (3)

Заменим в правой части формулы (3) n через x и обозначим результат через φk(x). Получим:

φk(x) называется функцией Бернулли. При х, равном целому положительному числу n, φk(n) представляет, как мы видели, сумму k-x степеней первых n-1 чисел натурального ряда, т. е.

.4 Другой вид для Sk и формулы Моавра

Принимая во внимание, что бернуллиевы числа с нечетными указателями (кроме B1=-1/2) равны нулю, т.е.:

мы можем написать в другом виде выражение (7) § 2 для Sk, а именно:

(1)

Напишем также в другом виде и формулу Моавра (9) § 2. Для этого положим в ней k = 2m и В3= B5=B7=…=0. Получим:

 (2)

.5 Представление бернуллиева числа в виде детерминанта

Мы видели, что бернуллиевы числа связаны между собой рекуррентной формулой Моавра и могут -быть вычислены последовательно. Однако желательно иметь выражение бернуллиева числа, независимое от предыдущих бернуллиевых чисел. Такое независимое выражение бернуллиева числа как функции его индекса было впервые получено Лапласом.

Мы не будем приводить формулы Лапласа, а дадим независимое выражение бернуллиева числа в виде детерминанта. Для этого воспользуемся формулой Моавра [формула (2) § 4]:

Представим эту формулу в другом виде, введя для краткости биномиальные коэффициенты и написав ее в обратном порядке, начиная с B2m, написав при этом все члены в левой части, а 1/2m+1 и B1=-1/2 перенеся направо. Тогда наша формула получает следующий вид:

(1)

Положим теперь в последней формуле m последовательно равным m, m-1, m-2, m-3,...,1. Получим систему от уравнений с m неизвестными:

Решим эту систему по способу Крамера относительно В2m:

Так как в детерминанте, стоящем в знаменателе, элементы, стоящие по одну сторону от главной диагонали, равны нулю, то детерминант равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали, т. е. равен единице.

Имеем окончательно:

Таково выражение бернуллиева числа в виде детерминанта, независимое от предыдущих бернуллиевых чисел. Пример. Вычислим B6:

.6 Сумма степеней четных и нечетных чисел

Мы имеем [формула (1) § 4]:

(1)

Заменим в формуле (1) n на 2n. Получим:

(2)

Умножим теперь все члены формулы (1) на 2k. Получим:

(3)

Формула (3) дает сумму k-х степеней первых четных чисел вплоть до 2n. Вычитая почленно (3) из (2), получим сумму k-x степеней нечетных чисел:

 (4)

Преобразуя равенство (4), получим:

(5)

Формула (5) дает сумму степеней первых n нечетных чисел натурального ряда.

.7 Знакопеременная сумма степеней

Умножим все члены формулы (3) § 6 на 2. Получим:

(1)

Вычтем равенство (1) почленно из равенства (2) предыдущего параграфа. Получим:

(2)

Преобразуем формулу (2). Получаем:

 (3)

Формула (3) дает знакопеременную сумму k-х степеней первых 2n чисел.

параболический детерминант четный бернуллиевый

Список литературы

1. Кудрявцев В.А. - Суммирование степеней чисел натурального ряда и числа Бернулли. - М.; Л.: ОНТИ Глав. ред. общетехн. лит. и номографии, 1936. - 72с