Зміст

Вступ

. Топологія. Бази топології та системи околів

. Замикання множини. Аксіоми численності. Збіжні послідовності

. Підпростір топологічного простору. Прямий добуток топологічних просторів

. Неперервні відображення топологічних просторів

. Компактність в топологічних просторах

Висновки

Список використаної літератури

Вступ

Топологічний простір є тим математичним поняттям, яке дає можливість розглянути граничний перехід і неперервність відображення в найбільш загальному вигляді та узагальнює поняття метричного простору.

Мета курсової роботи: ознайомитись з поняттям топологічного простору, розглянути основні означення. Розглянути різні типи топологічних просторів.

Завдання:

ознайомитись з основними означеннями в топологічних просторах;

з’ясувати які є типи топологічних просторів;

розглянути неперервні відображення топологічних просторів.

Об’єктом курсової роботи є топологічні простори.

Дана курсова робота складається із п’яти розділів, вступу, висновків та використаної літератури. В першому розділі мова йде про замкнені множини, відкриті множини, околи, базиси топології, про скрізь щільні множини, про ніде не щільні множини. Зокрема, наведені означення топологічного простору та бази топологічного простору; у другому розділі наведені означення точок дотику, межових точок. Також наведені аксіоми численності та розкриті поняття збіжних послідовностей; третій розділ розкриває нам поняття підпростору топологічного простору. Дано означення прямого добутку топологічного простору; у четвертому розділі висвітлене поняття неперервного відображення в точці; п’ятий розділ присвячений компактності топологічних просторів.

1. Топологія. Бази топології та системи околів

Якщо - довільна непорожня множина, то позначимо через  сукупність всіх підмножин цієї множини, . Очевидно, .

Означення 1. Клас τ підмножин непорожньої множини , називається топологією на множині , якщо він володіє властивостями (задовольняє наступні умови):

) 

) якщо довільна множина індексів, то



) при кожному справедливе .

Впорядкована пара  при цьому називається топологічним простором (т.п.). Множини із вказаного класу називаються відкритими множинами топологічного простору .

Зазначимо, що умови 13 називаються інакше аксіомами топологічного простору , який будемо позначати через , якщо відомо про яку топологію іде мова.

Означення 2. Множина , називається замкнутою в т.п. , якщо .

Спираючись на закони де Моргана та властивості відкритих множин т.п.  можна довести наступні твердження:

а)  та  замкнуті множини;

б) перетин довільної сукупності замкнутих множин замкнутий;

в) об’єднання скінченної сукупності замкнутих множин замкнуте.

Зауваження 1. Якщо задано деякий клас підмножин множини , який володіє вказаними вище властивостями а), б), в), що характерні для замкнутих підмножин т.п., то на основі цього класу визначається топологія  на , яка складається, як можна показати, з усіх найможливіших доповнень до  таких підмножин.

Приклад 1. Впорядкована пара  сукупність всіх найможливіших об’єднань інтервалів разом із множиною , є топологічний простір.

Виявляється, що на множині , яка містить більше одного елемента, можна задати різні топології, отримуючи різні топологічні простори. Зокрема топологіями на множині є наступні класи множин: . При цьому  називається антидискретною топологією, а дискретною топологією. Якщо довільна топологія на множині , вказаній вище, то, очевидно, .

Якщо на множині , задані топології  і , то топологія називається сильнішою за топологію , а топологія - слабшою за топологію .

Означення 3. Підмножина  т.п. , називається околом точки , якщо вона включає деяку відкриту множину із , що містить точку .

Сукупність всіх околів точки позначимо через 

Означення 4. Довільна відкрита множина , т.п. , яка містить точку , називається відкритим околом точки .

Сукупність всіх відкритих околів точки  позначимо через .

Очевидно, множина , є відкритою в т.п.  тоді і лише тоді, коли вона є околом кожної своєї точки.

Теорема 1. Нехай кожному елементу  поставлено у відповідність сукупність підмножин множини , які володіють властивостями.

Тоді існує єдина топологія на , в якій  відіграє роль сукупності всіх околів кожної точки  із . Вказана топологія задається рівністю.

Доведення сформульованої теореми можна знайти в підручнику [1].

Зауваження 2. Неважко переконатися в тому, що сукупність  всіх околів довільної точки , т.п. , володіє властивостями типу 4)-7), які характерні для сукупностей підмножин множини , вказаних в попередній теоремі. Зазначимо, що теорема 1 дає можливість задати топологію на множині  з допомогою класів  підмножин множини , про які іде там мова.

Означення 5. Клас , називається базою топології  на множині , якщо кожна відкрита непорожня множина , являє собою об’єднання деякої сукупності множин із цього класу.

Приклад 2. Базою природної топології  є сукупність всіх найможливіших інтервалів разом із множиною . Роль бази такої топології виконує також зчисленна сукупність всіх найможливіших інтервалів, разом із множиною .

Теорема 2. Клас , є базою топології  на множині  тоді і тільки тоді, коли 

Необхідність. Якщо база топології  на  і , то  де . Тому .

Достатність. Якщо клас  відкритих множин, , володіє властивістю (1), то  причому. Отже, , тобто кожна множина , є об’єднанням множин із класу 

Зауваження 3. На основі попередньої теореми можна показати, що клас підмножин множини  є базою деякої топології  на  тоді і лише тоді, коли виконуються умови:

) множини є об’єднанням множин із класу ;

) для довільних двох множин  та  із класу  і кожної точки , існує множина , така, що  При цьому вказана топологія  задається однозначно класом множин . Дві топології на  із спільною базою співпадають.

Означення 6. Сукупність  околів точки , називається базою системи  всіх околів цієї точки із топологічного простору , якщо .

Приклад 3. В топологічному просторі із природною топологією на клас інтервалів утворює базу системи  всіх околів точки х. Ця база складається із зчисленної сукупності околів точки .

Теорема 3. Нехай в кожній точці , задано клас підмножин множини , який задовольняє умови:

) ;

) 

) .

Тоді існує єдина топологія на множині , для якої класи , є базами системи всіх відкритих околів точки , а сукупність всіх множин із усіх класів , є базою  топології , причому .

Доведення теореми 3 знову можна знайти в підручнику .

Зауваження 4. Можна переконатися в тому, що сукупності всіх відкритих околів довільної точки  топологічного простору , володіють властивостями типу 10-12), які характерні для сукупностей  підмножин множини із попередньої теореми.

Теорема 3 також дає можливість задати топологію на множині , з допомогою класів , підмножин множини , які задовольняють умови 10-12) (і які для цієї топології будуть базами системи всіх відкритих околів кожної точки .

2. Замикання множини. Аксіоми численності. Збіжні послідовності

Нехай - довільна непорожня підмножина т.п. .

Означення 1. Перетин усіх найможливіших замкнутих множин із т.п. , які включають множину , називаються замиканнями цієї множини і позначаються через  або .

Оскільки вказаний вище перетин є замкнута множина, то і - замкнута множина, причому це найвужча замкнута множина, що включає .

Очевидно, і замкнута множина). Операція замикання володіє властивостями: . Вони доводяться на основі означення замикання.

Нехай точка т.п. , і підмножина множини .

Означення 2. Точка  називається точкою дотику множини , якщо ;

точка  називається граничною точкою множини , якщо ;

точка називається ізольованою точкою множини , якщо .

Очевидно, точка дотику множини - це або ізольована точка множини  або її гранична точка. Зрозуміло, що сукупність всіх точок дотику множини  співпадає із її замиканням.

Означення 3. Точка  називається внутрішньою точкою підмножини  т.п. , якщо .

Сукупність всіх внутрішніх точок множини  називається її внутрішністю і позначається .

Множина  називається межею множини і позначається .

Означення 4. Говорять, що т.п.  задовольняє в точці , першу аксіому з численності а.з.), якщо існує база  системи  всіх околів цієї точки, яка складається із зчисленної сукупності околів.

Означення 5. Говорять, що т.п.  задовольняє другу аксіому зачисленності (ІІ а.з.), якщо існує база  топології , яка складається із зчисленної сукупності відкритих множин.

Приклад 2. Із прикладу 3, §1.1., випливає, що т.п. із природною топологією  задовольняє І а.з. в кожній точці х.

Означення 6. Підмножина  т.п.  називається щільною в цьому просторі, якщо .

Означення 7. Якщо існує зчисленна множина , яка щільна в т.п. , то цей простір називають сепарабельним.

Приклад 3. Оскільки множина раціональних чисел зчисленна і вона щільна в т.п. із природною топологією , то цей простір сепарабельний.

Теорема 1. Справедливі твердження:

) якщо т.п.  в точці , задовольняє І а.з., то існує зчисленна база  системи  всіх околів точки , яка складається із відкритих множин таких, що 

) якщо т.п.  задовольняє ІІ а.з., то він в кожній точці , задовольняє і І а.з.;

3) якщо т.п.  задовольняє ІІ а.з., то він сепарабельний.

Покажемо справедливість першого твердження. При вказаних в цьому твердженні умовах існує зчисленна база  системи  усіх околів точки . То множина  відкрита і. Якщо , то . За побудовою  тобто . А це означає, що база системи  всіх околів точки .

Якщо виконуються умови другого твердження, то існує зчисленна база  топології . Тоді роль бази  системи  всіх околів довільної точки , відіграють всі ті множини із бази топології , які містять точку . Відкриті околи точки утворюють базу всіх околів в цій точці і, отже, клас  множин із класу  утворює зчисленну базу системи .

При виконанні умов третього твердження існує знову зчисленна база  топології . Вибравши із кожної множини  по одній точці, утворимо зчисленну множину . Неважко показати, що . Оскільки включення  очевидне, то 

Означення 8. Послідовнсть  точок т.п.  називається збіжною до точки , і пишуть  або , якщо .

При цьому точка  називається границею послідовності .

Виявляється, що збіжна послідовність точок т.п. може мати кілька і навіть нескінченну сукупність границь.

Приклад 4. В т.п. із антидискретною топологією  кожна послідовність його точок збігається до довільної точки 

Означення 9. Топологічний простір  називається відокремлюваним або інакше хаусдорфовим, якщо для довільних різних точок  та  із , існують їх околи, що не перетинаються.

Теорема 2. Справедливі твердження:

) послідовність  точок т.п.  збігається до точки , тоді і лише тоді, коли для кожного околу із деякої бази  системи  всіх околів точки  існує номер *п*.

2) у відокремлюваному т.п.  збіжна послідовність має лише одну границю.

Необхідність умов твердження 4) очевидна. Покажемо їх достатність. Якщо ці умови виконуються, то . Тоді . Отже, .

Твердження 5 доводиться методом від протилежного з використанням означення границі послідовності.

Зауваження. Можна показати, що , де підмножина т.п. , , який задовольняє в точці  І а.з., тоді і лише тоді, коли існує послідовність , яка збігається до точки .

. Підпростір топологічного простору. Прямий добуток топологічних просторів

Нехай довільна непорожня підмножина т.п. ,. Покажемо, що клас множин , є топологією на .

Такий висновок випливає із наступних рівностей:



де 

Означення 1. Топологія , що вказана вище, називається індукованою топологією, а т.п.  - підпростором т.п. .

Приклад 1. Якщо  і топологія, яка індукована природною топологією , то  є підпростором т.п. При цьому множина не є ні відкритою ні замкнутою відносно топології . Однак вона є відкритою і замкнутою відносно топології 

Можна показати, що в загальному випадку 

Якщо дано два т.п. , то розглянемо прямий добуток , множин  та  і клас



очевидно, 

Якщо  то



Тому, згідно із зауваженням 3, §1.1., клас є базою єдиної топології  на . Топологія називається прямим добутком топологій  та  і позначається 

Означення 2. Впорядкована пара , де  називається прямим добутком т.п.  і т.п. .

Якщо дано т.п.  то сукупність всіх множин виду  є, як можна показати, базою єдиної топології на множині . При цьому топологія , яка визначається вказаною базою, називається прямим добутком топології  і позначається



Впорядкована пара  називається прямим добутком т.п. .

Приклад 2. Топологічний простір  (компоненти) і  природна топологія є прямий добуток топологічних просторів. База топології  складається з усіх найможливіших вимірних відкритих паралелепіпедів та множини .

. Неперервні відображення топологічних просторів

Нехай дано два т.п. 

Означення 1. Відображення  т.п.  в т.п.  називається неперервним в точці , якщо для кожного околу  точки  існує окіл  точки  такий, що Відображення  називається неперервним (неперервним на ), якщо воно неперервне в кожній точці із 

Приклад. Відображення  таке, що , неперервне, оскільки для кожного околу точки  при довільному околі точки справедливе 

Теорема: Справедливі твердження:

) вказане в попередньому означенні відображення  неперервне тоді і лише тоді, коли прообраз кожної відкритої множини із т.п.  є відкрита множина т.п. ;

) якщо відображення  неперервне в точці , то для кожної послідовності такої, що  виконується  

) якщо т.п.  в точці , задовольняє І а.з., то попередня вимога є і достатньою для неперервності відображення в точці ;

) якщо відображення т.п.  в т.п.  неперервне і відображення  т.п.  в т.п.  неперервне, то композиція де , цих відображень також неперервна.

Зупинимося на доведенні першого твердження. Якщо відображення неперервне і відкрита підмножина множини  то для точки , виконується  і тому  є окіл точки . Існує окіл  точки , такий що  Отже, існує відкрита підмножина  множини , для якої , тобто Таким чином



тобто . Необхідність умов першого твердження доведено.

Достатність. Якщо виконуються умови першого твердження, то для довільної точки , і довільного околу  існує відкрита підмножина  множини  така, що  Прообраз , множини  є відкрита підмножина множини , яка містить точку , оскільки  Отже, окіл точки  і . Неперервність відображення доведена.

Друге твердження доводиться з допомогою означення неперервності відображення .

Третє твердження доводиться методом від протилежного.

Справедливість четвертого твердження випливає із співвідношення 

Означення 2. Бієктивне відображення т.п.  на т.п. називається гомеоморфним (або гомеоморфізмом), якщо і обернене до нього відображення  неперервні.

Означення 3. Відображення т.п.  в т.п. називається відкритим(замкнутим), якщо образ , кожної відкритої (замкнутої) множини , є відкрита (замкнута) множина.

5. Компактність в топологічних просторах

Поняття компактності відіграє важливу роль в різних розділах математики. Зокрема відома з математичного аналізу лема Бореля-Лебега фактично стверджує компактність відрізка числової прямої і вона дає можливість довести ряд змінюваних теорем. Ще більш суттєві застосування має поняття компактності топологічного і зокрема метричного простору.

Означення 1. Клас  підмножин топологічного простору  називається покриттям множини , якщо  (у випадку, коли , вимагається, щоб ).

Означення 2. Вказане вище покриття називається скінченним (зчисленним), якщо множина індексів скінченна(зчисленна); таке покриття називається відкритим, якщо всі множини відкриті.

Означення 3. Топологічний простір  називається компактним, якщо із кожного відкритого покриття його можна виділити скінченне покриття (підпокриття);

цей простір називається зчисленно-компактним, якщо кожна нескінченна множина , має в цьому просторі принаймні одну граничну точку;

т.п.  називається секвенційно компактним, якщо із кожної послідовності, можна виділити збіжну підпослідовність.

Теорема 1. Якщо т.п.  задовольняє ІІ а.з., то із кожного нескінченного відкритого покриття його можна виділити зчисленне покриття (підпокриття).

Якщо , де відкриті множини і зчисленна база топології , то позначимо через одну із відкритих множин покриття, яка містить точку . Позначимо через  одну із множин бази, яка містить точку  і включається в . Зчисленна сукупність множин  із бази утворює покриття множини . Для кожної множини  виберемо одну із множин , яка включає .

Теорема 2. Справедливі твердження:

) якщо т.п.  зчисленно-компакний, відокремлювний (хаусдорфів) і в кожній точці , задовольняє І а.з., то він секвенційно компактний;

) якщо т.п.  секвенційно компактний і задовольняє ІІ а.з., то він компактний;

) якщо т.п.  компактний, то він зчисленно-компактний;

) якщо т.п.  секвенційно компактний, то він зчисленно-компактний.

Якщо виявиться, що множина  скінченна, то деякий елемент цієї послідовності, який позначимо через , зустрічається в ній нескінченну кількість разів і тому підпослідовність збігається до точки . Якщо множина  нескінченна, то згідно з умовами першого твердження вона має граничну точку . Оскільки т.п. задовольняє в точці  І а.з., то згідно із відомим твердженням, існує зчисленна база  системи усіх її околів, яка складається із відкритих множин, таких, що . Позначимо через  перший член послідовності , відмінний від . Оскільки т.п.  відокремлюваний, то існують околи точок ,які не перетинаються. Окіл точки  включає окіл  із бази системи околів. Зрозуміло, що і .

Позначимо через перший член послідовності , який належить околу  і відмінний від, і т.д. Ми отримали підпослідовність  таку, що

Зупинимося на доведенні другого твердження. Вважаючи т.п.  секвекційно компактним, і який задовольняє ІІ а.з., припустимо, що він не є компактним. Тоді існує покриття його сукупністю  відкритих множин , із якого не можливо виділити скінченне покриття (підпокриття). Розглянувши тоді послідовність, що , можемо стверджувати, що із неї неможливо виділити збіжну підпослідовність. Це тому, що в протилежному випадку границя  збіжної підпослідовності належала б деякій множині . Оскільки є окіл точки , то що неможливе за побудовою послідовності  Справді, якщо то . Отже, із послідовності  неможливо виділити збіжну підпослідовність. А це суперечить секвенційній компактності т.п. 

Покажемо справедливість третього твердження. Вважаючи т.п.  компактним і взявши довільну нескінченну множину розглянемо зчисленну її підмножину  Покажемо, що множина  має граничну точку, яка буде граничною точкою і для множини  Припустимо протилежне, тобто, що множина  не має жодної граничної точки. Тоді множина  замкнута, оскільки вона не має точок дотику зовні неї. Отже, кожна множина відкрита, причому сукупність  всіх таких множин утворює відкрите покриття множини  Справді, точка належить всім множинам ; якщо , то . Вибравши скінченне відкрите покриття (підпокриття)  множини , отримаємо



Отримане протиріччя показує справедливість третього твердження.

Доведемо нарешті четверте твердження. Якщо виконуються його умови, то, взявши нескінченну множину , розглянемо довільну зчисленну її підмножину . Із послідовності  попарно різних точок множини виділимо збіжну її підпослідовність  Тоді точка  є граничною точкою множини  і, отже, множини М.

Наслідок. Якщо відокремлюваний т.п.  задовольняє ІІ а.з., то еквівалентні наступні твердження:

а) зчисленно-компактний т.п.;

б) секвенційно компактний т.п.;

в) компактний т.п.

Як відомо, якщо т.п.  задовольняє ІІ а.з., то він в кожній точці , задовольняє і І а.з.. Якщо окрім того т.п.  ще є і відокремлюваним, то, застосовуючи попередню теорему, приходимо до висновку, що всі імплікації із ланцюга б)в)а) істинні. А це стверджує вказані вище еквівалентності.

Приклад 1. Топологічний простір із природною топологією на не є компактним, оскільки із покриття системою інтервалів неможливо виділити скінченне покриття множини такими інтервалами.

Означення 4. Підмножина т.п. називається компактною, якщо із кожного покриття її відкритими множинами цього простору можна виділити скінченне покриття (під покриття).

Приклад 2. Згідно із відомою лемою Бореля-Лебега, кожна обмежена і замкнута підмножина М т.п.,  компонент) і природна топологія компактна.

Теорема 3. Підмножина  т.п. , компактна тоді і лише тоді, коли т.п.  із індукованою топологією  на компактний.

Необхідність. Якщо довільне покриття множини відкритими множинами із топології , то розглянемо ті відкриті множини із топології , для яких .

Клас  утворює покриття множини  відкритими множинами із топології . Оскільки множина компактна відносно топології , то і деяка скінченна сукупність множин  також утворює покриття множини . Тоді множини із топології  утворюють скінченне покриття множини .

Достатність. Якщо довільне покриття множини відкритими множинами із топології . Якщо скінчене покриття множини  із топології  то , де , є покриттям множини  відкритими множинами із топології , то скінченне покриття множини  множинами із топології 

Теорема 4. Довільна замкнута підмножина  компактного т.п.  компактна.

Якщо довільне покриття замкнутої множини, , відкритими множинами із топології , то  разом із множиною утворюють відкрите покриття множини . Виділивши із останнього покриття скінченне покриття множини , отримаємо скінченне покриття множини 

Теорема 5. Компактна підмножина  відокремлюваного т.п. , замкнута.

Вважаючи і взявши довільну точку ,  можемо стверджувати, що для кожної точки , існують відкриті околи  та , які не перетинаються. Клас  усіх відкритих околів довільної точки із утворює відкрите покриття множини .

Згідно з компактністю множини , існує скінченна сукупність  відкритих околів, що покриває множину . Множина являє собою відкритий окіл точки  і не перетинається із об’єднанням сукупності околів, які утворюють скінченне покриття множини , причому  не перетинається з . Для кожної точки  побудуємо таким чином окіл , який не містить точок множини . Це означає, що поза множиною не міститься жодна точка дотику множини , тобто  і, отже, 

Теорема 6. Справедливі твердження:

) образ компактного т.п. при його неперервному відображенні в т.п. компактний.

) неперервне відображення компактного т.п.  у відокремлюваний т.п.  є замкнуте відображення.

Якщо виконуються умови твердження 5), то розглянемо довільне покриття  образу  Всі множини , внаслідок неперервності відображення , відкриті,. Клас  є відкритим покриттям множини . Виділивши із останнього покриття скінченне під покриття множини , отримаємо відповідно скінченне підпокриття  множини . А це означає компактність .

Якщо виконуються умови твердження 6), то розглянемо довільну замкнуту множину . Ця множина компактна, внаслідок теореми 4. Її образ також компактний, внаслідок твердження 5). Оскільки т.п.  відокремлюваний, то множина  замкнута.

Зауваження. Якщо є неперервне відображення із природною топологією , і  (компонент), то, згідно із попередніми твердженнями, образ  компактної підмножини  т.п. компактний. Як відомо з математичного аналізу компактна множина є замкнута і обмежена в т.п. Ми отримали відому теорему Вейєрштрасса, згідно з якою, неперервна на замкнутій і обмеженій множині Е числова функція обмежена і досягає на  свого найбільшого і найменшого значень. Це тому, що при неперервному відображенні замкнутої і обмеженої множини Е, справедливі співвідношення: .

Означення 5. Підмножина т.п. , називається перед компактною, якщо її замикання  компактне в цьому просторі.

Зрозуміло, що кожна компактна підмножина топологічного простору є перед компактною, але не навпаки.

Висновки

У даній курсовій роботі було розглянуто топологічні простори та основні означення пов’язані з ними.

В першому розділі мова йшла про замкнені множини, відкриті множини, околи, базиси топології, про скрізь щільні множини, про ніде не щільні множини. Зокрема, були наведені означення топологічного простору та бази топологічного простору.

У другому розділі були наведені означення точок дотику, межових точок. Також наведені аксіоми численності та розкриті поняття збіжних послідовностей.

Третій розділ розкрив нам поняття підпростору топологічного простору. А також ми ознайомились з означенням прямого добутку топологічного простору. Ознайомились з прикладами.

Поняття неперервного відображення в точці, та означення гомеоморфізму ми розглянули в четвертому розділі.

Останній розділ нашої роботи був присвячений компактності топологічних просторів. В ньому ми розкрили поняття компактних просторів, зчисленно-компактних та секвенційних. Також ознайомились з означенням перед компактної множини та підпокриття.

аксіома математичний простір топологічний

Список використаної літератури

1. Бурбаки Н. Общая топология. - М., Наука, 1957.

. Зорич В.А. Математический анализ. Часть 2. - Изд. 4-е, испр.- М.,2002. - 664 с.

. Кураторський, Казимир "Топологія'. Пер. з англ. М.Я. Антоновського. т.1-2, Москва, "Мир' 1966-1969р.

4. Ришард Енгелькинг “Общая топология” - Москва, “Мир”, 1986 р.