МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГАОУ ВПО "ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

Факультет естественнонаучного и математического образования

Кафедра математики, алгебры и математического анализа

КУРСОВАЯ РАБОТА

Циклические подгруппы и группы

Исполнитель: студентка 2 курса

факультета математики, информатики и физики

Щелчкова К.В.

Научный руководитель: ст. пр. Авдеева А.А.

Ростов-на-Дону

***Оглавление***

Введение

Теоретическая часть

§ 1. Группы. Различные определения. Примеры

§ 2. Свойства групп

§ 3. Мультипликативные циклические подгруппы и группы

§ 4. Аддитивные циклические подгруппы и группы

§ 5. Теорема Лагранжа и следствия из нее

Заключение

Литература

# ***Введение***

Данная работа посвящена рассмотрению темы "Циклические подгруппы и группы".

Теория групп - раздел общей алгебры <http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B1%D1%89%D0%B0%D1%8F\_%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0>, изучающий алгебраические структуры <http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F\_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0>, называемые группами, и их свойства. Понятие группы <http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D1%80%D1%83%D0%BF%D0%BF%D0%B0\_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)> возникло в результате формального описания симметрии <http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B8%D0%BC%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F> и эквивалентности геометрических объектов. В эрлангенской программе <http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D1%80%D0%BB%D0%B0%D0%BD%D0%B3%D0%B5%D0%BD%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F\_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%BC%D0%B0> Феликса Клейна <http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BB%D0%B5%D0%B9%D0%BD,\_%D0%A4%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D0%BA%D1%81> изучение геометрии <http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F> было связано с изфучением соответствующих групп преобразований.

Например, если заданы фигуры <http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B8%D0%B3%D1%83%D1%80%D0%B0> на плоскости <http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BB%D0%BE%D1%81%D0%BA%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C\_(%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F)>, то группой движений выясняется их равенство. Одной из первых задач, приведших к возникновению теории групп, была задача получения уравнения степени *m*, которое имело бы корнями <http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%8C\_%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F> *m* корней данного уравнения степени *n* (*m < n*). Общую основу для теории уравнений, строящуюся на теории перестановок <http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B5%D1%80%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B0%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%BA%D0%B0>, в 1770 <http://ru.wikipedia.org/wiki/1770>-1771 <http://ru.wikipedia.org/wiki/1771> гг. нашёл Лагранж, и на этой почве в дальнейшем выросла теория подстановок.

Паоло Руффини <http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D1%83%D1%84%D1%84%D0%B8%D0%BD%D0%B8,\_%D0%9F%D0%B0%D0%BE%D0%BB%D0%BE> в 1799 <http://ru.wikipedia.org/wiki/1799> г. предложил доказательство неразрешимости уравнений пятой и высших степеней в радикалах. Для доказательства он использовал понятия теории групп, хоть и называл их другими именами. Артур Кэли <http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%8D%D0%BB%D0%B8,\_%D0%90%D1%80%D1%82%D1%83%D1%80> и Огюстен Луи Коши <http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D1%88%D0%B8,\_%D0%9E%D0%B3%D1%8E%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BD\_%D0%9B%D1%83%D0%B8> стали одними из первых математиков, оценивших важность теории групп. Эти учёные также доказали некоторые важные теоремы теории.

Современное определение понятия "группа" было дано только в 1882 <http://ru.wikipedia.org/wiki/1882> г. Вальтером фон Дюком <http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%94%D1%8E%D0%BA,\_%D0%92%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D1%82%D0%B5%D1%80\_%D1%84%D0%BE%D0%BD&action=edit&redlink=1>. В середине XX века <http://ru.wikipedia.org/wiki/XX\_%D0%B2%D0%B5%D0%BA> была проведена огромная работа по классификации всех конечных простых групп <http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%8F\_%D0%B3%D1%80%D1%83%D0%BF%D0%BF%D0%B0>.

Целью данной работы является изучение темы "Циклические подгруппы и группы".

Задачи курсовой работы:

· Изучить и изложить элементы теории групп, подгрупп.

· Самостоятельно подобрать и выполнить упражнения практического характера.

# ***Теоретическая часть***

# ***§ 1. Группы. Различные определения. Примеры***

Определение 1. Алгебраическая система <A,\*> называется *группой*, если А - полугруппа, в которой каждый элемент имеет нейтрализующий.

Определение 2. Алгебраическая система <A,\*> называется *группой*, если бинарная операция "\*" ассоциативна и обратима на множестве А.

Определение 3. Алгебраическая система <A,\*> называется *группой*, если она удовлетворяет следующим условиям:

) операция "\*" ассоциативна;

2) существует нейтральный элемент е такой, что A \* e = e \* A = A;

3) для любого элемента а А существует обратный или нейтрализующий элемент á такой, что

а \* á = á \* а = е.

Определение 4. Группа <А, \*> называется *коммутативной* или *абелевой*, если бинарная операция "\*" коммутативна на множестве А.

Определение 5. Группа <А, \*> называется *конечной*, если количество ее элементов конечно, и *бесконечной*, если количество ее элементов бесконечно.

Количество элементов конечной группы называется ее *порядком*.

Важные примеры групп:

. Полная линейная группа n-ой степени над полем Р (Р = Q, R, C).

<GLn (P),.>, где GLn (P) = { (aij) n×n: det (aij) ≠0, aij  P, i,j = }

2. Специальная линейная группа n-ой степени над полем Р (Р = Q, R, C).

<SLn (R),.>, где SLn (R) = { (aij) n×n: det (aij) = 1, aij  R, i,j = }

3. Группа кватернионов.

<Q8,.>, где Q8 = {±1, ±i, ±j, ±k}, i2 = j2 = k2 = - 1; ij = k, ki = j, jk = i, ji = - k, ik = - j, kj = - i, конечная группа 8-го порядка.

4. Группа преобразований.

< ◦>, где  - множество обратимых преобразований множества А,

А ≠, "°" - суперпозиция (произведение, композиция) преобразований.

5. Группа подстановок n-ой степени или симметрическая группа <Sn,°> подстановок n-ой степени, где Sn - множество подстановок n-ой степени.

6. Знакопеременная группа <An,°> подстановок n-ой степени, где An - множество четных подстановок n-ой степени, An  Sn, "°" - суперпозиция подстановок.

. Четверная группа Клейна.

<V,°>,

где V = {e, a, b, c}  A4  S4, A4 - знакопеременная группа подстановок 4-ой степени, S4 - симметрическая группа подстановок 4-ой степени.

8. Группа остатков по данному модулю или группа вычетов по данному модулю, или группа классов вычетов по данному модулю.

# ***§ 2. Свойства групп***

Пусть алгебраическая система <А,\*> - группа.

Свойство 1. Бинарная операция "\*" сократима в группе:

 a, b, с  A из равенств a \* b = a \* c (1), b \* a = c \* a (2) => b = c (3).

Доказательство.

(1) => (3)

a \* b = a \* c | \* a’ слева

а’ \* (a \* b) = a’ \* (a \* c) =>ассоциативность "\*" (a’ \* a) \* b = (a’ \* a) \* c =>условие 3 определения группы e \* b = e \* c =>условие 2 определения 3 группы b = c (3).

(2) => (3)\* a = c \* a (2) => b = c (3)\* a = c \* a | \* a’ справа

(b \* a) \* a’ = (c \* a) \* a’ =>ассоциативность "\*" b \* (a \* a’) = c \* (a \* a’) => условие 3 определения группы b \* e = c \* e =>условие 2 определения 3 группы b = c (3).

Свойство 2. Нейтральный элемент единственен.

Доказательство.

Пусть е, е1 - два нейтральных элемента группы. Покажем, что е1 = е.

Пусть а = е, е1 - нейтральный элемент группы А относительно операции "\*": е \* е1 = е1 \* е = е (1).

Пусть а = е1, е - нейтральный элемент группы А относительно операции "\*": е1 \* е = е \* е1 = е (2)

Из подчеркнутых равенств (1) и (2) видно, что е1 = е.

Свойство 3. Нейтрализующий для каждого элемента группы единственен.

Доказательство.

Пусть a’1, a’2 - два нейтрализующих элемента для а  А. Справедливы равенства:

а \* a’1 = a’1 \* a = е (1), a’2 \* a = a \* a’2 = е (2)

Из подчеркнутых равенств (1) и (2) видно, что a’1 \* a = a’2 \* a => a’1 = a’2 = a’.

Свойство 4. Нейтрализующий для произведения двух элементов равен "произведению" нейтрализующих для сомножителей, взятых в другом порядке: (a \* b) ’ = b’ \* a’.

Доказательство.

Справедливо равенство (a \* b) \* (b’ \* a’). Действительно, в силу обобщенной ассоциативности, имеем a \* (b \* b’) \* a’ = e свойство нейтрализующего элемента

a \* e \* a’ = e =>ассоциативность (a \* e) \* a’ = e =>свойство нейтрального элемента a \* a’ = e =>свойство нейтрализующего элемента е = е.

Свойство 5. Нейтрализующий для нейтрализующего к элементу а равен самому элементу а.

Доказательство.

Справедливы равенства:

а \* a’ = a’ \* a = е (1) и а’ \* (a’) ’ = (a’) ’ \* a’ = е (2)

Из подчеркнутых равенств (1) и (2) видно, что

а \* a’ = (a’) ’ \* a’ =>свойство 1 группы сократимость справа (a’) ’ = a’.

Свойство 6. Уравнения a × x = b (1) и y × a = b (2) однозначно разрешимы. Иначе говоря, уравнения (1) и (2) имеют в группе единственное решение.

Доказательство.

а) Покажем, что уравнение (1) разрешимо:

а \* х = b | \* á слева

á \* (a \* x) = á \* b =>ассоциативность "\*" (á \* a) \* x = á \* b =>свойство нейтрализующего e \* x = á \* b =>свойство нейтрального x = á \* b => уравнение (1) разрешимо.

б) Покажем, что уравнение (1) однозначно разрешимо:

a \* x = b | \* á слева

á \* (á \* x) = á \* b => (á \* a) \* x = á \* b => e \* x = á \* b => x = á \* b;

а \* х = b | \* á справа

(a \* x) \* á = b \* á => a \* (x \* á) = b \* á => a \* e = b \* á => x = b \* á => уравнение (1) однозначно разрешимо.

# ***§ 3. Мультипликативные циклические подгруппы и группы***

Пусть А ≠  <А, ·> - мультипликативная группа,

Н - подмножество множества А, Н ≠.

Определение 1. <Н,·> - называется *подгруппой мультипликативной группы* А, если выполняются следующие условия:

**1.** Н - замкнуто относительно бинарной операции "\*"  а, b  Н, ab H;

**2.** Существует еН = еА - единственный элемент относительно "°";

**3.** а  Н существует а-1 Н.

Определение 2. Если Н = А или Н = {е}, то <Н,·> - называется несобственной подгруппой группы А.

Если Н  А, Н - собственное подмножество множества А, то подгруппа называется *собственной подгруппой группы А*.

Н = А - сама группа А.

Н = {е} - единичная подгруппа.

циклическая подгруппа группа мультипликативная

Пример. Является ли <А, ·>, где А = {1, - 1, i, - i}, i - мнимая единица, группой?

Решение.

) Проверим условия мультипликативной группы.

"·" - бинарная ассоциативная операция на множестве А.

Таблица Кэли для "·" на множестве А.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| "·" | 1 | -1 | i | -i |
| 1 | **1** | -1 | i | -i |
| -1 | -1 | **1** | -i | i |
| i | i | -i | -1 | **1** |
| -i | -i | i | **1** | -1 |

2)  еН = 1  А: а  А а × 1 = 1 × а = а;

) а  А  а-1  А

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Элемент | 1 | 1 | i | -i |
| Нейтрализующий элемент | 1 | -1 | -i | i |

<А, ·> - подгруппа.

Важным примером мультипликативных подгрупп являются так называемые *мультипликативные циклические подгруппы*.

Пусть <А, ·> - группа. Элемент е  А - единичный элемент. Элемент а ≠ е, а  А.

(а) - множество целых степеней элемента а: (а) = {х = аn: n  Z, a  A, a ≠ e}

Справедлива

Теорема 1. < (а), ·> является подгруппой группы <А, ·>.

Доказательство. Проверим условия мультипликативной подгруппы.

) Н = (а) - замкнуто относительно "·":

х = аn, y = al, n,e  Z, x, y  Н, xy = anal = an+l  H, т.к. n + l  Z;

) e = 1 = a0  H,  A: x  H xa0 = a0x = x;

) x = a  H, x-1 = a-n  Н: ana-n = a-nan = a0 = 1.

Из 1) - 3) по определению Н имеем < (а), ·> - подгруппа мультипликативной группы А.

Определение 3. Пусть <А, ·> - некоторая мультипликативная группа и

а ≠ е, а  А.

*Порядком элемента а* называется наименьшее натуральное число n такое, что аn = е.

Пример. Найти порядки элементов а = - 1, b = i, c = - i мультипликативной группы А = {1; - 1; i; - i}

1: (-1) 1 = - 1, (-1) 2 = 1 = e. Следовательно,

n = 2 - порядок элемента - 1.

i: (i) 1 = i, (i) 2 = - 1, (i) 4 = 1 = e. Следовательно,

n = 4 - порядок элемента i.

i: (-i) 1 = - i, (-i) 2 = - 1, (-i) 4 = 1 = e. Следовательно,

n = 4 порядок элемента - i.

Теорема 2. Пусть <А, ·> - группа, а  А, а ≠ е, а - элемент n-го порядка, тогда:

) Подгруппа (а) группы А имеет вид: (а) = {а0 = е, а, а2, …, аn-1} -

n - элементное множество неотрицательных степеней элемента а;

) Любая целая степень элемента аk, k  Z, принадлежит множеству (а) и

ak = e <=> k = nq, n  N, q  Z.

Доказательство. Покажем, что все элементы (а) различны. Предположим противное: ak = al, k > l, тогда ak-l = e. k - l < n, что противоречит определению порядка элемента (а). В множестве (а) все элементы различны.

Покажем, что аk, К  Z, принадлежит множеству (а).

Пусть k = n, k: n, ak = anq + r = ak × anq + r = (an) q × ar = eq × ar = e × ar = ar,

≤ r ≤ n ≤ 1 => ak  (a). Если r = 0, то k = nq <=> ak = e.

Определение 4. Подгруппа < (а), ·>, где (а) = {а0 = е, а, а2, …, аn-1}, группы А, а - элемент n-го порядка, называется *циклической подгруппой группы А* (мультипликативной циклической подгруппой группы А).

Определение 5. Группа, совпадающая со своей подгруппой <А, ·>, < (а), ·>, мультипликативной циклической подгруппой, называется *циклической группой*.

Теорема 3. Всякая мультипликативная циклическая группа является абелевой.

Доказательство. А = (а), а ≠ е, а - образующий элемент группы

 ak, al  A, ak × al = al × ak. Действительно, ak × al = ak+l = al+k = al × ak, l,k  Z.

# ***§ 4. Аддитивные циклические подгруппы и группы***

Определение 1. Пусть <A,+> - аддитивная группа, Н - подмножество А,

Н ≠.

<Н,+> называется подгруппой аддитивной группы А, если выполняются следующие условия:

) Н замкнуто относительно "+":  a, b  H, a + b  H;

) Существует еН = еА - нулевой элемент относительно операции сложения

)  а  Н существует противоположный - а  Н.

Пример 1.

<Q,+>, где Q - множество рациональных чисел, является группой рациональных чисел. Z  Q, Z ≠ .

<Z,+> - подгруппа группы Q. Проверим выполнение условий аддитивной подгруппы:

) Z замкнуто относительно "+":  a, b  Z, a + b  Z;

) Существует еZ = еQ = 0 - нулевой элемент относительно операции сложения;

)  а  Z существует противоположный - а  Z.

Определение 2. Если Н = А и Н = {е}, то подгруппа <H,+> называется *несобственной подгруппой* группы А.

Если Н  А, то подгруппа <H,+> называется *собственной подгруппой* *группы А.*

Пример 2.

Н1 = Q - несобственная подгруппа группы Q,

Н2 = {0} - несобственная (нулевая) подгруппа группы Q,

Н3 = Z - собственная подгруппа группы Q.

Пусть <A,+> - аддитивная группа.

Через (а) обозначим множество всех кратных элементов а  А, а ≠ е:

(а) = {x = na: a  Z}.

Справедлива

Теорема 1. < (a),+>, где (а) = {x = na: a  Z}, является подгруппой группы А.

Доказательство.

Проверим выполнение условий аддитивной подгруппы:

) (а) замкнуто относительно "+":

 х, у  (а) х + у ϵ (а).

Действительно, пусть x = na, y = la, n, l  Z.

x + y = na + la = (n + l) a  (a), n + l  Z.

2) Существует е (а) = еА = 0 × а = 0;

)  х  (а) существует противоположный - х (а), x = na - x = - (na) = (-n) a  (a).

Из 1) - 3) =>по определению < (a),+> - подгруппа группы А.

Определение 3. Пусть А - аддитивная группа, <A,+>, а А, а ≠ е. *Порядком элемента а* называется наименьшее натуральное число n, такое что na = e, е - нулевой элемент.

Определение 4. Подгруппа < (a),+> группы <A,+>, а - элемент n-го порядка, вида (а) = {0а, 1а, …, (n-1) а} называется *аддитивной циклической подгруппой группы А, порожденной элементом а.*

Определение 5. Группа <A,+>, совпадающая со своей циклической подгруппой <A,+> = < (a),+>, называется *циклической группой*. Элемент а называется *образующим элементом* группы.

Теорема 2. Всякая аддитивная циклическая подгруппа абелева.

Доказательство.

<A,+> = < (a),+>, (a) = {na: n  Z}.

 na, ka  (a) справедливо равенство na + ka = ka + na. Действительно,

na + ka = (n + k) a = (k + n) a = ka + na.

# ***§ 5. Теорема Лагранжа и следствия из нее***

Теорема Лагранжа. Пусть <А, ·> - конечная мультипликативная группа порядка n. Н - некоторая ее подгруппа порядка k. Индекс подгруппы Н в группе А и ее порядок являются делителями порядка группы. Иначе говоря, справедливо равенство: n = k×l, l = A: H, l - индекс подгруппы.

Доказательство.

Запишем левостороннее разложение группы А по подгруппе Н.

А = Н а1Н  …  ае-1Н,

|A| = |H| + |а1Н| + … + |ае-1Н|,

|A| = n, |H| = k, n = k + k + … + k = k×l.

l раз

Следствие 1. Порядок элемента а, а ≠ е, <А, ·> = < (а), ·> n-го порядка, является делителем порядка группы.

Следствие 2. Всякая циклическая группа <А, ·> = < (а), ·> простого порядка n = p имеет только две несобственные подгруппы:

Н1 = {e} - единичная подгруппа,

H2 =A - сама группа.

Следствие 3. Все циклические подгруппы циклической группы

<А, ·> = < (а), ·> n-го порядка имеют вид:

Hi = {a0 = e, ad, a2d, …, a (k-1) d}, i = 1, 2, …,

где d - любой натуральный делитель порядка группы n = k×d,

k - порядок подгруппы.

Следствие 4. Все циклические подгруппы аддитивной циклической группы <Zn, +> n-го порядка имеют вид:

Нi = {0, d, 2d, …, (k-1) d}, i = 1, 2, …,

где d - любой натуральный делитель порядка группы n = k×d, k - порядок подгруппы.

**Практическая часть.**

**1.** <Z, - > - группа? Если да, то является ли она коммутативной (абелевой)?

Решение.

1) Бинарная операция "-" не ассоциативна: a, b c  Z

**(**a - b) - c ≠ a - (b - c) => <Z, - > не является группой,

<Z, - > - не группа.

**2.** А - множество целых чисел, кратных любому натуральному числу n относительно сложения.

Решение.

А = nZ = {x: x = nk, k  Z, n  N, n - фиксированное натуральное число}.

<A, +> - группа?

Решение.

1) Проверим, является ли "+" бинарной операцией на множестве А.

Пусть x = nk, y = nl, k, l  Z x, y  A. + y = nk + nl = n (k + l)  A, k + l  Z =˃ "+" - бинарная операция на множестве А.

Проверим, является ли "+" ассоциативной операцией на множестве А.

x, y, z, z = np, p  Z,

(x + y) + z = x + (y + z). Действительно,

(nl + nk) + np = nk + (nl + np),

n (l + k) + np = nk + n (l + p) - это равенство выполняется, т.к. "+" целых чисел - ассоциативная операция => "+" ассоциативная операция на А.

2) Существует ли нейтральный элемент относительно "+"?

 х  А выполняются ли равенства х + е = е + х = х?

Рассмотрим равенство х + е = х

nk + e = nk, e = 0 = n0  A.

е - существует относительно "+".

) Существует ли х`  А относительно операции "+"?

х + х` = х` + х = е?

Рассмотрим равенство х + х` = е.

х` = е - nk = n0 - nk = n (0 - k) = n (-k), - k  Z => х`  A  x  A

Из 1) - 3), по определению группы, => данная система является группой, аддитивной группой.

4) Проверим, является ли группа коммутативной.

 х, у  А выполняется ли равенство х + у = у + х?

nk + nl = nl + nk

n (k + l) = n (l + k) - выполняется, так как "+" - коммутативная операция на Z.

Из 1) - 4) => алгебраическая система <A, +> - коммутативная аддитивная группа.

**3.** <Q, ·> - группа?

Q = {x: x = m/n, m  Z, n  N}.

Решение.

1) Проверим, является ли умножение бинарной операцией на Q.

y = k/l, k  Z, l  N.

xy = m/n \* k/l = mk/nl  Q => "·" - бинарная операция на Q.

Проверим, является ли "·" ассоциативной операцией на Q.

z = p/q, p  Z, q  N,  x, y, z  Q: x · (y · z) = (x · y) · z?

Проверка: x · (y · z) = m/k · (k/l · p/q) = m/n · kp/lq = m/n · (kp/lq) = "·" ассоциативна на Z, N (mk) p/ (nl) q = mk/nl · p/q = (m/n · k/l) · p/q = (x · y) · z.

"·" ассоциативная операция на Q => 1) условие группы выполняется.

2) Существует ли нейтральный элемент относительно "·" на Q?

x · e = e · x = x?  x  Q, x · e = x, e = 1  Q

3) Существует ли х' относительно операции "·" на Q?

 x  Q, х · х' = х' · х = е? х · х' = е = 1,х · х' = 1,х'= 1/x, x ≠ 0 => не выполняется, элемент х = 0 не имеет обратного.

<Q, ·> - не является группой.

**4.** <R\{0}, ·> - группа? Если да, является ли она абелевой?

Решение.

1)  a, b  R\{0} a · b = с  R\{0} => "·" - бинарная операция на множестве R\{0};

 a, b, c х R\{0}, a · (b · c) = (a · b) · c => "·" - ассоциативная операция на множестве R\{0} = R\*.

2) Существует ли нейтральный элемент на множестве R\{0}?

a R\*, а · е = е · а = а.

Рассмотрим равенство а · е = а, е = 1  R\{0} => существует е  R\{0}.

3) Существуют нейтрализующий элемент а'?

a R\*. а' · а = а' · а = е = 1, а' = 1/а = х-1 ϵ R\{0}.

Из 1) - 3) => <R\{0}, ·> - группа.

**4.** Найти порядок a = (1243)  S4

S4 - симметрическая группа подстановок 4 - ой степени.

an = e, n - натуральное.

a =  ≠ e,2 =  \*  =  ≠ e,3 =  \*  =  ≠ e,4 =  \*  =  = e,4 = e, n = 4 - порядок группы.

**5.** S3 = {0 = e, 1, 2, …, 5}

1 =  n = - ?, n = 1, 1 ≠ e, n = 2

12 =   = = 2.

2 =  n = e- ?, n = 1 - ?, 2 ≠ e, n = 2

22 =  \*  =  = e.

# ***Заключение***

В заключении своей курсовой работы хочу подвести итог. Работа выполнена согласно методическому плану. Цели и задачи курсовой работы достигнуты. Учебные вопросы, предположенные к раскрытию темы "Циклические подгруппы и группы" отработаны. Теоретическая часть написана с помощью анализа учебной литературы, приведены примеры, иллюстрирующие теоретический материал.

Тема "Циклические подгруппы и группы" в настоящее время является актуальной, т.к. теория групп - один из разделов общей алгебры.

# ***Литература***

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 1. Основы алгебры: учебник для вузов. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

2. Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебник - М.: ТК Велби, издательство Проспект, 2007.

. Нечаев И.В. Задачник-практикум по алгебре. - М.: Просвещение, 1983.

. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. - М.: Высшая школа, 1979.

. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М.: Наука, 1977.

. Глухов М.М., Солодовников А.С. Задачник-практикум по высшей алгебре. - М.: Просвещение, 1993.

. Щипачев B. C. Основы высшей математики.4-е изд., стереотип. - М.: Высш. шк., 2001.

. А.М. Кондрашов. Сборник зачетных заданий по линейной алгебре. Часть 1. - Кр-ск, РИО КГПУ, 2001.

. Л.Я. Окунев. Высшая алгебра. - М.: Просвещение, 1966.

. Ф.Л. Варнаховский, А.С. Солодовников. Алгебра. Часть 1 и 2. - М.: Просвещение, 1978.