# **Курсовая работа**

# **Устойчивость стохастических систем**

**Введение**

стохастический уравнение ляпунов

Теория устойчивости получила свое развитие еще в XVIII веке, когда Леонард Эйлер сформулировал и решил задачу устойчивости состояния равновесия системы, состоящей из стержня, сжатого сжимающей силой. Дальнейшее развитие теория устойчивости получила в трудах Ляпунова А.М.

На данный момент задача устойчивости не потеряла своей актуальности. Необходимость постановки и решения таких задач при неполной информации важна в наше время, потому что данные задачи встречаются во всех отраслях жизнедеятельности человека. Сложность заключается в том, что система функционирует при наличии факторов, определяемых не точно. К примеру, можно рассмотреть явление стохастического резонанса. «Стохастический» - это относящийся к области хаоса, беспорядочному поведению, непредсказуемости. Суть явления стохастического резонанса заключается в том, что добавление в систему шума, т.е. хаотического движения, не уменьшает, а наоборот усиливает отклик системы на слабенькое периодическое воздействие. Другими словами, шум не подавляет сигнал, а помогает ему проявиться. И что интересно - наиболее сильный эффект возникает при некоторой вполне определенной, оптимальной интенсивности шума. Дабы не получить результат как в знаменитой истории про разрушение моста из-за того, что по нему в ногу прошла рота солдат, необходимо изучать те слабо контролируемые или вовсе непредсказуемые, носящие случайный характер факторы, которые сложным образом взаимодействуют друг с другом и вносят изменения работу системы.

Источник неполноты информации может быть связан с наличием помех в канале наблюдения за функционированием системы. Одним из важных источников неполноты информации является запаздывание, вызванное конечностью времени, необходимого для проведения наблюдений и обработки результатов.

Возможны разные способы изучения задач устойчивости. Мы будем придерживаться вероятностного подхода, в котором за неполноту информации будем принимать действие на систему случайных возмущений, с заданными статистическими характеристиками.

Задачи устойчивости динамических систем при случайных факторах, изменяющих действие системы, связаны с изучением условий, при которых некоторые статистические характеристики движения мало отклоняются при малом изменении возмущений.

Таким образом, посредством теории вероятностей будем изучать чувствительность некоторых систем и условий, при которых эти системы начинают отклоняться от привычного функционирования под действием случайных факторов.

**1. Основные формулы, используемые в работе**

Плотность вероятности гауссовского вектора:



Математическое ожидание случайного вектора:



Условное математическое ожидание  случайного вектора относительно -алгебры удовлетворяет равенству



Конечномерные распределения вероятностей случайного процесса 



Корреляционная матрица случайного процесса:



Плотность конечномерного распределения вероятностей стандартного винеровского процесса 



Закон повторного логарифма для винеровского процесса:



Стохастический интеграл Ито есть предел в среднеквадратическом интегральных сумм



Стохастический интеграл Стратоновича  есть предел в среднеквадратическом сумм



Стохастическое дифференциальное уравнение Ито:



Стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича:



Всякое решение  уравнения Стратоновича есть также решение уравнения Ито:



Формула Ито: если и , то



Теорема существования и единственности решения стохастического дифференциального уравнения Ито.

Пусть



Тогда существует, и притом единственное, решение уравнения Ито на любом отрезке .

Производящий оператор уравнения Ито:



Теорема Хасьминского. Если существует функция  такая, что



то тривиальное решение уравнения Ито устойчиво по вероятности. Если же



то тривиальное решение уравнения Ито асимптотически устойчиво в целом по вероятности.

Устойчивость линейных систем в среднеквадратическом. Для устойчивости в среднеквадратическом системы



необходимо и достаточно существование функции , удовлетворяющей оценкам



Для асимптотической устойчивости в среднеквадратическом уравнения



необходимо и достаточно, чтобы детерминированное уравнение



было алгоритмически устойчиво и чтобы был положителен определитель



**2. Определение стохастической устойчивости**

Вопрос об устойчивости некоторого решения уравнения (1.2) с помощью замены переменных может быть сведен к вопрос об устойчивости тривиального решения, поэтому будем считать, что

 (2.1)

При выполнении условия (2.1) стохастическое дифференциальное уравнение



 (2.2)

Имеет тривиальное решение  Под устойчивостью тривиального решения этого уравнения понимается его свойство мало изменяться при малом изменении начальных условий. В зависимости от конкретного понимания выражения «малое изменения решения» возможны различные определения устойчивости:

Тривиальное решение уравнения (2.2) называется cлабоустойчивым по вероятности, если для найдется такое , что при  и  выполняется неравенство 

асимптотически слабо устойчивым по вероятности, если оно слабо устойчиво по вероятности и для  найдется такое , что при  имеет место соотношение 

асимптотически слабо устойчивым по вероятности в целом, оно асимптотически слабо устойчиво по вероятности и  справедливо равенство 

асимптотически слабо устойчивым по вероятности в целом равномерно по начальным данным, если в предыдущем определении стремление к нулю равномерно для  и всех 

Тривиальное решение уравнения (2.2) называется:

p-устойчивым (p>0), если для  найдется  такое, что при  выполняется неравенство 

асимптотически p-устойчивым, если оно p-устойчиво, и для  при некотором  имеет место соотношение

экспоненциально p-устойчивым, если найдутся такие положительные постоянные , что 

асимптотически p-устойчивым в целом, если оно асимптотически p-устойчиво и для  справедливо соотношение 

Кроме приведенных определений используется также понятие устойчивости с вероятностью 1. Подразумевается устойчивость, при которой все траектории системы (кроме, может быть, множества траекторий нулевой вероятности) устойчивы в соответствующем смысле.

Предположим, что тривиальное решение уравнения (3.1) p-устойчиво (). Тогда для любого  в силу неравенства Гельдера имеем . Значит, в этом случае тривиальное решение является также и устойчивым при любом  Аналогично из асимптотической p-устойчивости следует асимптотичекая устойчивость при всех 

Воспользуемся теперь неравенством Чебышева:



Здесь  произвольная неотрицательная функция, для которой существует . На основание неравенства Чебышева при  для любого p>0 имеем

.

Следовательно, из p-устойчивости тривиального решения уравнения (2.2) вытекает его слабая устойчивость по вероятности, а из асимптотической p-устойчивости - асимптотическая слабая устойчивость по вероятности. Отметим еще, что p-устойчивость при p=2 называется также устойчивостью в среднеквадратическом.

Тривиальное решение уравнения (2.2) называется:

устойчивым по вероятности, если для  выполняется соотношение

 (2.3)

асимптотически устойчивым по вероятности, если оно устойчиво по вероятности и



равномерно устойчивым по вероятности, если  стремится к нулю при  равномерно по  и ;

асимптотически устойчивым по вероятности в целом, если оно устойчиво по вероятности и для  имеет место соотношение

.

Устойчивость по вероятности значительно сильнее слабой устойчивости и означает, что траектория процесса, начинающиеся в момент  из точки , всегда остаются в любой наперед заданной окрестности тривиального решения с вероятностью, стремящейся к единице, когда .

**3. Применение второго метода Ляпунова**

**Достаточные условия устойчивости**

Сформулируем ряд достаточных условий устойчивости, используя функции Ляпунова.

Функция называется положительно определенной, если  Пусть  - непрерывные скалярные неубывающие функции такие, что  Будем говорить, что функция  если эта функция дважды непрерывно дифференцируема по  и один раз по  всюду в области U, кроме, может быть, множества  и непрерывна в замкнутом множестве при любом 

Теорема 1**.** Пусть в области U существует непрерывная функция  для которой при x0 справедливы неравенства

, (3.1)

где оператор L=. Тогда тривиальное решение (2.2) устойчиво по вероятности.

Также можно сформулировать условия устойчивости и в других смыслах. Приведем некоторые из них.

Теорема 2. Пусть существует функция Ляпунова  такая, что



Тогда тривиальное решение уравнения (2.2) асимптотически устойчиво в целом по вероятности.

Теорема3. Пусть существует функция , удовлетворяющая неравенствам

 (3.2)

 (3.3)

Тогда тривиальное решение системы (3.1) экспоненциально р-устойчиво при.

Известно, что существует  при всех , а также равенство



Дифференцируя обе части этого равенства по  и учитывая неравенства (3.2) и (3.3), получаем



Отсюда следует, что



Из этого неравенства и (3.2) вытекает оценка



означающая, что тривиальное решение уравнения (2.2) экспоненциально р-устойчиво.

Пример.

При рассмотрении работы реальных систем в условиях неопределенности можно использовать разные классы случайных величин и процессов для моделирования различных источников неполноты информации. Вопрос о выборе адекватной модели весьма существенен и крайне не прост. В каждом конкретном случае он должен специально исследоваться. Пусть, например, устойчивая скалярная система находится под действием случайных сил и описывается уравнением

. (3.4)

Тогда в соответствии с формулой Ито решение уравнения (3.4) имеет вид



Отсюда, используя закон повторного логарифма, заключаем, что при достаточно большой интенсивности  возмущения система (3.4) асимптотически устойчива по вероятности, т.е., в частности, систему можно стабилизировать (сделать устойчивой) за счет неопределенных факторов. Однако если работа системы описывается уравнением (3.4) в смысле Стратоновича, то это уже не имеет места. Действительно, в силу уравнений Стратоновича и Ито уравнение Стратоновича (3.4) эквивалентно следующему уравнению Ито:



На основании формулы Ито решение этого уравнения имеет вид



Значит, при таком способе описания скалярную систему нельзя стабилизировать случайными силами. Таким образом, этот пример показывает, что при описании конкретных физических систем в ряде случаев интеграл Стратоновича предпочтительнее.

**Устойчивость линейных систем в среднеквадратическом.** Исследуя условия экспоненциальной устойчивости в среднеквадратическом линейных систем вида

 (3.5)

Здесь и - заданные матрицы размера  с непрерывными ограниченными элементами, стандартные винеровские процессы  взаимно независимы.

Теорема4. Для экспоненциальной устойчивости в среднеквадратическом системы (5.6) необходимо и достаточно существование функции , удовлетворяющее оценкам (3.2), (3.3) при .

Достаточность следует из теоремы 3.

Необходимость. Зададим функцию  с помощью равенства

 (3.6)

Здесь постоянный параметр  будет выбран ниже, а через  обозначено решение уравнения (5.6) при  с начальным условием . Согласно определению экспоненциальной устойчивости в среднеквадратическом, имеем

 (3.7)

Из (3.6) и (3.7) вытекает неравенство (3.8):

 (3.8)

Для обоснования положительной определенности функции  заметим, что в силу формулы Ито стохастический дифференциал по  процесса  имеет вид

 (3.9)

где штрих означает знак транспонирования и положено .

Выражение в квадратных скобках в (3.9) с учетом производящего оператора марковского процесса есть результат применения производящего оператора , соответствующего процессу (3.5), к функции . Иными словами,

 (3.10)



Напомним, что . Поэтому  Отсюда и из ограниченности коэффициентов  и  уравнения (3.5) следует существование такой постоянной , что

 (3.11)

Далее, четвертый момент процесса  конечен на любом конечном интервале аргумента . Отсюда и из свойств стохастических интегралов Ито вытекает, что

 (3.12)

Проинтегрируем теперь обе части равенства (3.10) по  в пределах от  до  и вычислим потом математическое ожидание. С учетом (3.10) - (3.12)заключаем, что

 (3.13)

На основании (3.7) параметр  можно выбрать так, что при всех t справедливо неравенство



Отсюда и из (3.13) следует оценка



Тем самым установлено, что функция (3.6) удовлетворяет соотношениям (3.2) при р=2. Проверим, что для функции (3.6) справедливо неравенство (3.3) при р=2, имеющее в рассматриваемом случае вид



где оператор L задается выражением



Действуя на обе части формулы (3.6) оператором L, находим

 (3.14)

Имеем  Поэтому на основании равенства (3.14) получим



**Скалярные уравнения n-го порядка.**

Приведем условия асимптотической устойчивости в среднеквадратическом линейного уравнения, коэффициенты которого  возмущаются взаимно независимыми винеровскими процессами . Рассматриваемое уравнение имеет вид

 (3.15)

где  и  - заданные постоянные, и введено обозначение



Решение уравнения (5.16) при  определяется заданием в начальный момент времени  значений величин  Условия асимптотической устойчивости в среднеквадратическом системы (5.16) относительно возмущений начального положения формулируются следующим образом.

Теорема5. Для асимптотической устойчивости в среднеквадратическом системы (3.15) необходимо и достаточно, чтобы детерминированная система, полученная из (3.15) при  была асимптотически устойчивой и чтобы был положителен определитель



**. Устойчивость по вероятности движения спутника**

**Устойчивость по тангажу симметричного спутника на круговой орбите**

Движение реального спутника Земли определяется многими факторами, среди которых лишь градиент силы тяжести можно рассматривать как детерминированный. Все же остальные (например, аэродинамические и магнитные моменты, солнечная радиация, электрическое поле Земли, метеоритный поток и др.) имеют случайные составляющие. Кроме того, моменты инерции спутника, на величину которых влияют термоупругие колебания антенн и солнечных батарей, перемещение экипажа, движение жидкости в баках, также являются случайными.

Второй метод Ляпунова может быть применен при рассмотрении вопросов устойчивости движения спутника под действием случайных возмущений. Рассмотрим плоское движение симметричного спутника по круговой орбите. Предполагается, что угол тангажа  и скорость  описывается системой двух уравнений Ито:

 (4.1)

Здесь - стандартный винеровский процесс, постоянные и  определяются параметрами движения спутника, - интенсивность случайных возмущений атмосферы. При этом  - динамический коэффициент аэродинамического момента, - момент сил тяготения. Задача состоит в определении условий устойчивости по вероятности нулевого решения систем (4.1). Для этого используем теорему 1 и положим

 (4.2)

где параметр будет выбран ниже.

В силу (4.1), (4.2) и формулы производящего оператора марковского процесса получаем

 (4.3)

Из соотношений (4.2), (4.3) следует, что условия (3.1) выполнены, если . Исследуя зависимость допустимых значений от  при фиксированном , заключаем, что область изменения  окажется наибольшей при



Значит устойчивость по вероятности движения спутника по углу тангажа имеет место, если

 (4.4)

Из этого условия видно, что при отсутствии возмущений () движение по тангажу устойчиво, если момент сил тяжести удовлетворяет неравенству . При наличии же возмущений на основании (6.4) получим



Следовательно, учет возмущений приводит к уменьшению возможных значений моментов сил тяготения, при которых сохраняется устойчивость по тангажу движения спутника.

**Устойчивость по углу рыскания спутника по круговой и экваториальной орбитах**

Рассмотрим плоские колебания симметричного спутника на круговой и экваториальной орбитах по углу рыскания, обусловленные случайными флуктуациями магнитного поля Земли. Уравнения для угла рыскания имеют вид

 (4.5)

где - интенсивность случайных возмущений магнитного поля, а и - положительные постоянные, зависящие от детерминированной составляющей магнитного поля и характеристик спутника.

Исследуем устойчивость по вероятности нулевого положения равновесия системы (4.5) с помощью теоремы (3.1). Положим



Вычислим , получим



Отсюда видно, что условия (3.1) выполнены, если

 (4.6)

Таким образом, колебания по углу рыскания относительно случайных возмущений магнитного поля Земли устойчивы по вероятности, если интенсивность этих возмущений удовлетворяет неравенству (4.6).

**Заключение**

Изучение поведения и конструирования систем управления, обладающих требуемыми в приложениях свойствами, является ключевой задачей теории управления. При этом на первый план выдвигается такое свойство, как устойчивость. Устойчивость играет важную роль. Этот термин имеет много различных значений. Под устойчивостью обычно понимают свойство системы сохраняться при малых изменениях начальных состояний, внешних воздействий, параметров системы и т.д. Конечно, при математической формализации это понятие нуждается в уточнении, причем такая формализация может быть сделана по-разному

Основное внимание в данной работе было уделено исследованию динамических систем при случайных возмущениях - стохастическим. Стохастической может быть система, для описания которой используются вероятностные понятия и методы. Устойчивость играет важную роль. Этот термин имеет много различных значений.

В данной работе был рассмотрен второй метод Ляпунова (метод функций Ляпунова), который является не только одним из основных методов анализа уже созданных, но также важным методом синтеза вновь создаваемых систем.

**Список использованных источников**

1 Афанасьев, В.Н., Колмановский, В.Б., Носов, В.Р. Математическая теория конструирования систем управления //Издание второе, дополненное, Москва «Высшая школа»,2014.

Кушнер Г.Дж. Стохастическая устойчивость и управление//Перевод с английского Наппельбаума:Изд-во Мир, Москва,2009

Острем, К.Ю. Введение в стохастическую теорию управления, М., Мир, 2014

Свешников, А.А Прикладные методы теории случайных функций. - Гл.ред.физ.-мат.лит., 2009.