**Властивості множин потужності континуум**

**1.Проблеми теорії множин**

Теорія множин - це абстрактно-теоретична наука про множини довільної природи. Синонімом «множини» є «сукупність», «набір», «клас» тощо. У працях Кантора було викладено теорію так званих трансфінітних кардинальних чисел. Ця теорія грунтується на систематичному використанні математичного поняття актуальної нескінченності, у зв'язку з чим учений зробив спробу створити математичний апарат для опису актуально нескінченних множин. Стосовно інших математиків, то якщо вони й говорили про нескінченність, то лише як про потенційну, що може стати меншою чи більшою за будь-яку задану величину, але яка водночас сама завжди лишається величиною скінченною, будь-якою «величезною» величиною. Інакше кажучи, потенційна нескінченність - це процес, який ніколи не буде завершений (а з незавершеного важко зробити щось завершене, придатне для чогось практичного).

У теорії Кантора найважливішим є те, що на операції з множинами й підмножинами не накладається жодних обмежень, зумовлених природою об'єктів, які входять до складу множин. У такому разі поняття теорії множин наближуються до понять математичної логіки.

Проте у теорії множин було виявлено ряд недоліків, названих парадоксами, або антиноміями (нерозв'язними суперечностями). Розглянемо, чим були викликані ці суперечності.

Зазвичай сама множина не є одним із своїх елементів. Наприклад, елементи множини всіх письменників - не множини, а конкретні індивідуальності. Зрозуміло, що сама множина не може належати до числа власних елементів. Множина письменників не є письменником. Щоправда, часто трапляються такі множини, елементами яких є також множини. Наприклад, в армії основними структурними елементами батальйону є роти, тобто певні множини солдат. Якщо рота є структурним елементом батальйону, то кожний такий елемент - множина. Проте множину (батальйон) не можна віднести до її власних елементів. Об'єднавши в одну множину всі можливі множини, маємо щось дивне: множину, яка є власним елементом.

Математики в такій ситуації вважають, що упорядкована множина не може мати таку «абсурдну» властивість, оскільки упорядкованою називають множину лише в тому разі, якщо вона не є елементом самої себе. З'ясуємо, чи може множина всіх упорядкованих множин бути упорядкованою.

Якщо подібна множина упорядкована, вона має перебувати в одному ряді з іншими упорядкованими множинами, тобто бути серед власних елементів. Але тоді вона перестає бути множиною всіх упорядкованих множин. Щоб не загубитися серед множин, така множина має бути неупорядкованою. Припустімо, що таке можливо. Тоді, якщо множина всіх упорядкованих множин не є упорядкованою, її не можна віднести до розряду своїх елементів - упорядкованих множин. Але саме в цьому разі множину називають упорядкованою.

Виникло замкнене коло: якщо множина упорядкована, то вона неупорядкована, а якщо вона неупорядкована, то вона упорядкована. Однак якщо теорія множин помилкова, то в математиці не залишається нічого бездоганного. Це і так, і не так. Відомий угорський математик другої половини XX ст. Роза Петер указує на неможливість повністю зашпарувати те, що з'явилося в математичній будові після такого сильного струсу. Проте немає підстав для негативних висновків. Це - парадокс, але парадокс, який можна пояснити. Одна з найвідоміших проблем канторової теорії множин пов'язана з так званою гіпотезою континууму (континуум-гіпотезою).

Якщо елементи двох множин можна поставити парами так, щоб жоден елемент якоїсь із множин не залишився! без пари, то вважається, що ці дві множини мають однакову потужність. Розглянемо приклад. Натуральні числа є лише частиною множини раціональних чисел.

Це зрозуміло. Погано зрозуміло інше, а саме: потужність множини всіх раціональних чисел дорівнює потужності множини всіх натуральних чисел. Подібний феномен пояснюється тим, що логічні принципи й поняття спираються не стільки на досвід і спостереження, скільки на свої внутрішні закони, яким байдуже, що частина дорівнює цілому або «якщо 2 + 2 = 4, то крокодили літають дуже низько». Наближаючись до розгляду континуум-гіпотези, звернемося до множини всіх дійсних чисел. Ці числа розміщені на числовій прямій неперервно й нібито злипаються. Тому потужність множини дійсних чисел називають потужністю континууму, де під словом «континуум» розуміють неперервність.

Відносно нескінченних потужностей можна сформулювати запитання: чи існує для кожної потужності така потужність, що виникає безпосередньо за нею? Так, існує.. Для цього ствердження Кантор узагальнив поняття звичайного числа й дістав поняття трансфінітного числа - числа, що виходить за межі скінченного. Трансфінітні числа (нескінченні множини) поводяться, як і натуральні. Найменшою нескінченною потужністю; є потужність множини натуральних чисел. Щодо прірви між зчисленною й континуальною нескінченностями зазначимо, що між будь-якими сусідніми числами натурального ряду є безліч точок числової прямої. Отже, прірва між зчисленною множиною та континуумом безмежна. Стосовно існування в такій прірві проміжних нескінченностей Кантор вважав, що нескінченних множин із проміжною потужністю не існує. Проблема існування нескінченних множин із проміжною потужністю називається проблемою континууму, і пов'язана вона з питанням про так звану аксіому вибору. Виникненню такої аксіоми передували вихідні положення канторової теорії множин, які не задовольняли одну з основних вимог математичної логіки - несуперечність системи аксіом, про що свідчать виявлені в ній суперечності. Вихід із цієї ситуації вчені побачили в побудові такої аксіоматики, яка давала б усе, що треба, і нічого зайвого. І таку аксіоматику було побудовано. Вона дістала назву системи аксіом Цермело-Френкеля, на честь таких відомих учених, як Е.Цермело (1871- 1953) та А. А. Френкель (1891- 1965). Для успішної боротьби з суперечностями ці автори ввели спеціальну «обмежувальну» аксіому, яка забороняла існування множин, що зумовлюють нерозв'язні суперечності. Дана аксіома підтвердила погляди Кантора щодо відсутності проміжних потужностей між зчисленною множиною та континуумом.

На запитання стосовно суперечності чи несуперечності аксіоми вибору іншим вихідним аксіомам теорії множин відповів австрійський математик К. Гедель (1906- 1978). Він показав, що, приймаючи істинність континуум-гіпотези, у теорію множин неможливо ввести ніяких суперечностей.

Отже, річ у виборі аксіом. З часом аксіоматичний метод у теоретичних науках рішучіше просувався вперед.

**2.Потужність континууму**

**множина теорема математика**

Про множини, рівнопотужні множині дійсних чисел [або дійсних чисел з інтервалу (0, 1)] кажуть, що вони мають потужність континуума, і потужність таких множин позначається символом c. Континуум-гіпотеза стверджує, що с=. Означення.

Потужність множини (0, 1) називається потужністю континууму. Потужність континууму позначається ℵ1 (алеф-один). Потужність континуума - це потужність множини дійсних чисел R, тобто cardR = ℵ1, тому що існує бієкція (0, 1) → R. Наприклад. Множина всіх точок Rn з раціональними або алгебраїчними координатами зліченна, тому що її кардинальне число дорівнює ℵ0 n = ℵ0, а множина всіх точок R n з дійсними координатами незліченна і дорівнює континууму. Наприклад. Множина комплексних чисел має потужність континуум, через те що вона рівнопотужна R 2 : ℵ1 2 = ℵ1.

Будь-який векторний простір скінченного числа вимірів n над полем дійсних чисел або комплексних чисел має потужність континуум. Множина всіх дійсних функцій дійсних змінних має потужність, яка є строго більшою за потужність континуума, тому що її потужність дорівнює 1 1 ℵ ℵ , а 1 1 ℵ ℵ = 0 1 2( ) ℵ ℵ = 10 2 ℵℵ = = 1 2 ℵ > ℵ1.

Континуум-гіпотеза

При дослідженні потужностей нескінченних множин був встановлений той факт, що множина кардинальних чисел є лінійно впорядкованою. Лінійна впорядкованість означає, що для кожного кардинального числа існує кардинальне число, яке безпосередньо слідує за ним. ℵ0 є найменшим трансфінітним числом. Але нічого невідомо про те, яке трансфінітне число є наступним за ℵ0. Існує тільки припущення, яке називається континуум-гіпотезою. Континуум-гіпотеза. Кардинальне число 0 2 ℵ безпосередньо слідує за ℵ0. Це означає, що ℵ0< 0 2 ℵ і між ними немає жодного іншого кардинального числа. Цей факт потребує доведення. Ми нічого не знаємо про множини, які незліченні, але менші ніж континуальні. Не знаємо навіть, чи існують такі множини. Відсутність прикладів подібних множин не є доведенням неможливості їх існування, тому твердження про безпосереднє слідування 0 2 ℵ за ℵ0 є гіпотезою, а не теоремою. Можна піти далі і сформулювати більш загальне твердження. Узагальнення континуум-гіпотези. Для будь-якого кардинального числа α кардинальне число 2α безпосередньо слідує за α. Звідси слідує, що послідовність кардинальних чисел необмежена: ℵ0< 0 2 ℵ

Властивості

. Дві скінченні множин рівнопотужні тоді й тільки тоді, коли вони складаються з однакового числа елементів. Тобто для скінченної множини поняття потужності збігається із звичним поняттям кількості.

. Для нескінченних множин потужність може збігатись з потужністю своєї власної підмножини, наприклад .

. Більш того, множина нескінченна тоді і тільки тоді, коли вона містить рівнопотужну власну (тобто таку, що не збігається з основною множиною) підмножину.

. Теорема Кантора гарантує існування потужнішої множини для будь-якої даної: Множина всіх підмножин множини A має більшу потужність, ніж A, або .

. За допомогою канторового квадрата можна також довести наступне корисне твердження: Декартів добуток нескінченної множини A з самою собою рівнопотужний A.



Потужність декартового добутку:

. Формула включення-виключення в найпростішому виді:



**3.Властивості множин потужності континуум**

. Об’єднанням скінченної кількості множин потужності континуум є множиною потужності континуум.

Доведення.

Припустимо, що множини Аі (і=1..n) мають потужність континуум. Тоді згідно прикладу 2.3.2. можна записати  звідки випливає, що  а це означає, що об’єднання є множиною потужності континуум.

. Об’єднанням зчисленної кількості множин потужності континуум є множиною потужності континуум.

Доведення.

Розглянемо Аі (і=1,2,…,n,…) - множини потужності континуум. Подібно доведенню попередньої властивості можна записати звідки випливає що  а це означає, що об’єднання є множиною потужності континуум.

Приклад 2.4.1. Покажемо, що інтервал (0;1) є еквівалентним внутрішності квадрата, тобто (0;1)~(0;1)x(0;1).

Розглянемо довільну біжучу точку (x;y)є(0;1)x(0;1) (рис. 2.4.1)



Рис. 2.4.1

Нехай х=0,а1а2а3а4…, а у=0,b1b2b3b4… Розглянемо число t=0,a1b1a2b2a3b3…є(0;1). Поставимо парі (х;у) у відповідність число t. На підставі теореми Кантора-Берштейна, оскільки (0;1)x(0;1)⊂(0;1)⊂(0;1)x(0;1), отримуємо, що (0;1)~(0;1)x(0;1).

Зауваження. Оскільки дійсну числову площину R2 можна покрити зчисленною кількістю квадратів, то вона має потужність континуум.

. Об’єднання континуум множини потужності континуум  .

Оскільки І - множина потужності континуум, то І~(0;1). Так як довільне число  , то кожному  поставимо у відповідність довільне число хє(0;1):  . Оскільки  покриє весь квадрат (0;1)х(0;1) (рис. 2.4.2), тобто  , і згідно попереднього прикладу 2.3.3 є множиною потужності континуум.



Рис. 2.4.2

**4. Множини потужності континуум**

Теорема. Множина чисел із відрізка [0;1] є незчисленною.

Доведення. Припустимо, що множина [0;1] є зчисленною. Тоді всі значення і відрізка [0;1] можна перенумерувати. У результаті нехай це будуть {x1; x2; … ; xn ; …}. Розіб’ємо відрізок [0;1] на три рівні частини. Очевидно, що хоча б одна з отриманих частин не містить значення х1. Нехай це буде відрізок [a1;b1], який знову поділимо на три рівні частини, при чому одна з яких не містить значення х2. Нехай це буде відрізок [a2;b2]. Продовжуючи цей процес далі, отримаємо тобто:  - послідовність вкладених відрізків, довжини яких прямують до нуля . За принципом Кантора 

З іншого боку, оскільки  , то згідно з припущенням 

Означення 2.3.1 Множина А називається множиною потужності континуум, якщо вона є еквівалентною відрізку [0;1].

Приклад 2.3.2. Множини [a;b], (a;b), [a;b), (a;b], R мають потужність континуум, оскільки [0;1]~[a;b]~(a;b)~R.

**5.Потужність множин дійсних чисел. Континуум**

Теорема 1. Множина всіх дійсних чисел інтервалу (0,1) незчисленна. Доведення. Кожне дійсне число можна подати в системі числення з основою q у вигляді нескінченного дробу. Нехай q=10. Якщо не розглядати чисел з 9 у періоді (замінимо їх числами з нулем у періоді), то між числами інтервалу (0,1) і множиною нескінченних десяткових дробів вигляду 0, a1, a2… an… існує взаємно однозначна відповідність. Припустимо, що множина дійсних чисел інтервалу (0,1) зчисленна. Тоді всі ці числа можна занумерувати і подати у вигляді послідовності x1, x2…xn… Подамо всі ці числа у вигляді нескінченних десяткових дробів. Дістанемо: x1 = 0, a11 a12 … a1n ...,x2 = 0, a21 a22 … a2n …, . (1) xn = 0, an1 an2 … ann.. Де akl - одна з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 9. Виберемо тепер цифру b1 так, щоб b1 ≠ a11; далі виберемо b2 ≠ a22 і т. д. Взагалі для коного n виберемо bn ≠ ann. При цьому, щоб не було у періоді 9, вважатимемо, що bn ≠ 9. Утворимо тепер число: ? = 0, b1b2 … bn... Це число належить інтервалу (0,1), а тому воно має збігатися з одним із чисел (1). Але ? ≠ x1, бо на перших місцях після коми в них різні цифри; ? ≠ x2, бо на других місцях після коми в них різні цифри, і т. д. Взагалі ? ≠ xn , бо на n-х місцях після коми в них різні цифри, і т. д. Отже, ? не збігається із жодним числом xn. А це значить, що припущення про зчисленність множин дійсних чисел інтервалу (0,1) невірне. Множина чисел інтервалу(0,1) незчисленна.

Наведені тут спосіб доведення є елементарним прикладом дуже важливого в теорії множин діагонального процесу, який вперше запровадив Г. Кантор. Покажемо, що можна встановити взаємно однозначну відповідність між множиною всіх дійсних чисел і множиною всіх дійсних чисел інтервалу (0,1). Це можна зробити, наприклад, так: залежність y = tg x встановлює взаємно однозначну відповідність між інтервалом (- , ) змінної х і інтервалом (- ∞, ∞) змінної у із збереженням порядку, а інтервал (0,1) можна взаємно однозначно відобразити на інтервалі (- , ) також із збереженням порядку. Потужністю множини всіх дійсних чисел називається потужністю континууму, або потужністю с. Прикладом множини потужності с може бути множина дійсних чисел будь-якого інтервалу або сегмента. Розглянемо тепер деякі множини потужності континууму. Теорема 2. Множина ірраціональних чисел має потужність континууму. Доведення. Множину I ірраціональних чисел можна подати у вигляді D \ R, де D - множина всіх дійсних чисел, а R - множина всіх раціональних чисел. Але за теоремою: якщо множина М незчисленна, а А - скінченна або зчисленна її підмножина, то множини М і М \ А еквівалентні між собою (тобто вилучення з незчисленної множини М зчисленної або скінченної підмножини не змінює її потужності), D \ R, бо R - зчисленна множина. А це значить, що  = c. Оскільки множина дійсних чисел має потужність c більшу, ніж множина алгебраїчних чисел, яка є зчисленною, то існують неалгебраїчні дійсні числа. Їх називають трансцендентними.

Саме так доводив існування трансцендентних чисел Г. Кантор. Оскільки всі раціональні числа алгебраїчні (число , де p i q - цілі, є корінь рівняння qx = p), то всі трансцендентні числа ірраціональні. Якщо з множини I ірраціональних чисел вилучити алгебраїчні ірраціональні числа, які утворюють зчисленну множину, то залишиться множина трансцендентних чисел, яка має потужність континууму, оскільки вилучення зчисленної множини з незчисленної не змінює її потужності. Теорема 3. Об`єднання скінченної або зчисленної системи множин потужності континууму є множина потужності континууму. Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли дані множини попарно не мають спільних елементів, коли дані множини попарно не мають спільних елементів. Позначимо ці множини символом Mk (k = 1, 2, 3, …). Кожній множині Mk поставимо у взаємно однозначну відповідність напівсегмент [k - 1, k). Якщо множини Mk утворюють скінченну систему (k = 1, 2, … , n), то множина  перебуває у взаємно однозначній відповідності з напівсегментом [0, n) = , який має потужність континууму. Якщо ж множини Mk утворюють зчисленну систему, то множина перебуває у взаємно однозначній відповідності з нескінченним напівсегментом [0, ∞) = , який теж має потужність континууму. Нарешті, якщо множини Mk мають спільні елементи, то потужність об`єднання цих множин не менша від потужності, наприклад, множиниM1, і в той же час не більша від потужностіc такого об`єднання даних множин, коли розглядати однакові елементи цих множин, як різні елементи. За теоремою Кантора - Бернштейна і в цьому випадку потужність об`єднання дорівнює с. Теорема 4. Множина N всіх послідовностей (n1, n2, … , nk, ...) натуральних чисел має потужність континууму. Доведення. Для доведення теореми покажемо, що між елементами множини N і множиною чисел напівсегмента [0,1) можна встановити взаємо однозначну відповідність. Для цього кожне число напівсегмента [0,1) подамо у вигляді нескінченного двійкового дробу. Якщо не розглядати чисел з одиницею (q? = 2-1=1) у періоді, то кожне з чисел півсегмента [0,1) розкладається однозначно у нескінченний двійковий дріб. Нехай при цьому дійсне число  має розклад c1c2…ck…, де c1, c2, … ck, … - нулі або одиниці. Оскільки одиниці в періоді бути не може, то обов`язково серед чисел c1, c2, … ck, … будут нулі. Для кожного натурального m знайдуться такі натуральні k>m для яких ck = 0.

Щоб визначити розклад числа , досить вказати, на яких місцях стоять нулі (бо на інших місцях стоять одиниці). Нехай для числа  нулі будуть на місцях з номерами k1, k2, … , ki , … Ці числа утворюють послідовність натуральних чисел k1 < k2 < … < ki < … (1) Кожному  відповідає послідовність вигляду(1) і, нвпаки, кожній такій послідовності відповідає число . А тому множна всіх послідовностей вигляду (1) має потужність c. Запишемо це так:  Нехай тепер (n1, n2, …, ni ...) є елемент множини N. Покладемо n1 = k1, n2 = k2 - k1, n3 = k3 - k2, … Коли відомі числа k1, k2, … , ki, … , то за цими рівностями можна однозначно визначити n1, n2, … , ni, … Навпаки, знаючи n1, n2, … , ni, …, з цих рівностей однозначно можна знайти k1 = n1, k2 = k1 + n2 > k1, k3 = k2 + n3 > k2, ... Отже, числа k1, k2, … , ki, …утворюють послідовність вигляду (1). Встановлена взаємно однозначна відповідність вказує на те, що {( n1, n2, … , ni, …)}  …{( k1 < k2 < … < ki <, …)}[0,1). Теорему доведено. Теорема 5. Якщо елементи множини A =  визначаються за допомогою не більше від зчисленної множини індексів, кожний з яких незалежно один від одного пробігає множину значень потужності континууму, то множина A має континууму. Доведення.

Для доведення теореми покажемо, що можна встановити взаємно однозначну відповідність між множиною А і множиною N послідовностей натуральних чисел, яка за попередньою має потужність c. Нехай Xk - множина значень індекса xk. За умовою, а тому кожна з множин Xk еквівалентна множиніN. Між кожною множиною Xk і множиною N вставимо взаємно однозначну відповідність. Для кожного елемента A індекси x1, x2, …, xk, …набирають конкретних значень  , де  , а тому індексу  відповідає елемент множини N. Нехай елементу  поставлено у відповідність послідовність натуральних чисел ( N Змінюючи k, дістанемо зчисленну множину таких послідовностей:



З елементів  , які входять у (2), утворимо нову послідовність за діагональною схемою: спочатку випишемо елемент , далі , , потім , ,  і т. д. Отже, кожному  буде відповідати елемент , , , , … множини N. Навпаки, маючи елемент (p1, p2, …, pn, …)  N, можна скласти зчисленну множину послідовностей вигляду (2), якій однозначно відповідають певні елементи xk  Xk. Цим встановлено взаємно однозначну відповідність між множинами A і N, що і треба було довести. Для скінченної множини індексів доведення провадиться так само, з тією лише різницею, що в (2) буде скінченна множина послідовностей, і тому можна виписувати спочатку всі перші елементи, потім усі другі і т. д. З теореми 5 можна зробити ряд цікавих висновків. Кожну точку площини можна задати парою чисел x, y - її координатами, тобто множина точок еквівалентна множині з елементами ax,y, де індекси x i y незалежно один від одного пробігають множину значень c. А тому за теоремою 5 множина точок площини має потужність континууму. Аналогічно, множину точок простору можна задати з допомогою трьох індексів x, y, z, кожен з яких пробігає множину значень потужності c. А тому і множина точок простору має потужність континууму.

Множина точок будь-якої фігури на площині або тіла у просторі теж має потужність c. Справді, кожна така множина є підмножиною множини точок всієї площини або простору, а тому її потужність . З другого боку, для кожної плоскої фігури або тіла існує відрізок, який цілком належить фігурі або тілу, а тому  (бо потужність точок відрізка дорівнює c). Отже, . Наслідком з теореми 5 буде і така теорема. Теорема 6. Об`єднання континууму множин потужності континууму є множина потужності континууму. Доведення. Розглянемо спочатку той випадок, коли дані множини попарно не мають спільних елементів. Через кожну точку осі y площини (x, y) проведемо пряму, паралельну осі x. Таких прямих буде c, бо множина точок осі y має потужність c. Кожній з цих прямих поставимо у відповідність одну з множин, які входять в об`єднання. Між елементами цієї множини і точками відповідної прямої встановимо взаємно однозначну відповідність. Цим буде встановлено взаємно однозначну відповідність між об`єднання множин і множиною точок площини (x,y), яка має потужність c. Якщо дані множини мають спільні елементи, то їх об`єднання має потужність, не більшу від потужності c такого об`єднання даних множин, коли розглядати елементи цих множин як різні елементи, і одночасно не меншу від потужності c однієї з даних множин. Тому за теоремою Кантора- Бернштейна і в цьому випадку потужність об`єднання дорівнює c. Теорему доведено. Теореми 3 і 6 схематично можна записати так:



Теорема 7. Множина S усіх послідовностей вигляду (a1, a2, … , an, …), де ak (k = 1, 2, 3, …) незалежно один від одного набирають значень 0 або 1, має потужність контиууму. Доведення. Кожній послідовності (a1, a2, … , an, …) відповідає число з напівсегмента [0,1) з двійковим розкладом 0, a1, a2, … an, … і, навпаки, кожному такому числу відповідає певна послідовність. Якщо відкинути ті послідовності, в яких, починаючи з деякого елемента, всі елементи дорівнюють 1, то решті послідовностей відповідатимуть усі числа напівсегмента [0,1), потужність якого дорівнює с. Визначимо тепер потужність множини відкинутих послідовностей. Їм відповідатимуть числа, двійковий розклад яких має одиницю в періоді. Як відомо, такі числа можна подати і з нулем у періоді, наприклад, 0,0100(1) = 0,0101(0). Оскільки число з нулем у періоді є скінченний двійковий дріб, що визначає раціональне число, то множина відкинутих послідовностей зчисленна.

А це значить, що потужність множини S c + a = c. Теорему доведено. Очевидно, теорема 6 справджуватиметься і в тому випадку, коли всі ak набиратимуть два різних значення , взагалі відмінних від 0 i 1. Справді, заміна на 0, a на 1 не змінює потужності множини. Теорема 8. Множина всіх підмножин зчисленної множини має потужність континууму, тобто 2а = с. Доведення. Нехай T є множина всіх підмножин натурального ряду, а S - множина всіх послідовностей вигляду (a1, a2, … , an, …), де всі ak (k = 1, 2, 3, …) незалежно один від одного набирають значень 0 або 1. Оскільки множина натуральних чисел має потужність а, то . За теоремою 7 . Щоб довести теорему, досить показати, що  Візьмемо елемент  ( - якась множина натуральних чисел ). Поставимо елементу  у відповідність послідовність (a1, a2, … , an, …) з множини S за такими правилом: ak = 1, якщо число k належить множині натуральних чисел ak = 0, якщо k a2 = 1, a7 = 1, a9 = 1, k Ясно, що ця відповідніст однозначна. Навпаки, задаючисьбудь-якою послідовністю з множини S, за вказаним вище принципом однозначно можна побудувати елемент  Тим самим між множинами T i S буде встановлено взаємно однозначну відповідність. Теорему доведено. Після зчисленної потужності a було розглянуто потужність континууму c. При цьому c>a. Виникає питання, чи буде c першою потужністю, більшою від a, тобто чи існує потужність, яка знаходиться між a i c. Це питання становить так звану континуум проблему. Ця проблема не розв`язана до цього часу, хоч вважають, що такої потужності немає. (Це твердження приймається як аксіома континууму). Теорема 9. Декартовий добуток скінченої або зчисленної кількості множин потужності континуум має потужність континуум.

Доведення. Нехай А=  , де card An=с, для кожного n. тобто  . Оскільки card An=с, n=1, 2,... маємо, що для кожного n=1, 2,...

(згідно з попередньою властивістю). Тоді будь-якому  однозначно відповідає послідовність натуральних чисел, а набору (a1,…,ak,…) множина котру можна розташувати у послідовність  за зростанням суми індексів. Таким чином, елементу (a1,…,ak,…) множини А взаємно-однозначно відповідає елемент множини В.



Отже А~В, що й треба було довести.

Приклад. Rn має потужність континуум.

**6.Множини, потужність яких є вищою за потужність континуум**

Розглянемо множину Af, яка містить все можливі функції  . Оскільки R~[0;1], то розглядатимемо множину Af функцій f:[0;1]  . Припустимо, що Af - множина потужності континуум. Тоді Af~[0;1]  . Позначимо елемент f є Af, що відповідає t, через ft.

Розглянемо далі таку функцію:



тобто  Покладемо тепер x=t0. У результаті отримаємо  , тобто 1=0. Одержане протиріччя доводить, що множина все можливих дійсно значних функцій дійсного аргументу має потужність більшу за континуум.

Означення 2.5.1.Величина називається дискретною, якщо вона приймає скінчену або зліченну кількість значень. У протилежному випадку величина називається неперервною.

Приклад 2.5.1. Множина ірраціональних чисел має потужність континуум.

Порівняння потужностей.

Теорема 1.(характеристична властивість нескінчених множин).

Множин А є нескінченою тоді і тільки тоді, коли вона є еквівалентною деякій своїй підмножині, що не збігається з множиною А.

Означення . Нехай |A|=α і |B|=β. Будемо говорити, що α< β, якщо A~ B’ і B’⊂B, але множина А не є еквівалентною множині В.

Зауваження. Якщо А⊂В, то завжди  .

Теорема 2. (Кантора-Берштейна).

Якщо  .

Теорема 3. Потужність довільної зчисленної множини є найменшою з потужностей нескінченних множин.

Доведення. Розглянемо нескінченну множину А, потужність якої дорівнює  . Завжди існує зчисленна підмножина В множини А, причому А не є еквівалентною множині В. Тому. Оскільки В⊂А і В не еквівалентно А  |B|<|A|.

Потужність довільної зчисленної множини позначимо через æ, а потужність континуум через С.

Зауваження. æ<c.

Теорема 3. Розглянемо довільне натуральне число nєN. Тоді n< æ.

Доведення. Розглянемо множину



Отже, n< æ.

Теорема 4. Для довільної множини потужність множини всіх підмножин є більшою за власну потужність самої множини.

Доведення. Позначимо через В(А) - буліан множини А (множина всіх підмножин множини А).

Потужність булана В(А) дорівнює 2|A| , тобто |B(A)|= 2|A|. Із теореми 2.6.6. випливає цікавий факт теорії множин, пов’язаний з терміном «множина всіх множин».

Парадокс Кантора Нехай М - «множина всіх множин». Тоді за теоремою 2.6.6. |B(M)|<|M|. Але ж множина М є «найширшою» з усіх можливих множин. Отже, найбільшою множини немає.

Е = { множини, які не є елементами самих себе} = {x| (x - множина)^(  . Дана рівність не визначає множину. Дана аномалія є відомою під назвою парадокс Рассела.

**7.Арифметика потужності континууму**

Ми вже мали для потужності континууму С формули С + С + С + … + С + … = С (1) і С \*  (2) Тепер до них можна приєднати нові формули. Для цього спочатку покажемо справедливість твердження: Множина елементів  занумерованих скінченними або зчисленними послідовностями дійсних чисел, має потужність не вищу за потужність континууму. Справді, всякий такий елемент  визначається точкою P(x1, x2, x3, …) простору скінченного або зчисленного числа вимірів так, що двом різним елементам  відповідають різні точки P. Тому множина елементів e відображається на весь простір або на частину простору скінченного або зчисленного числа вимірів. І оскільки множина точок простору має потужність континууму, то множина елементів , відображаючись на весь або на частину цього простору, має потужність не вищу за потужність континууму. Ми вже дали означення добутку двох потужностей.

Нехай A є множина всіх дійсних чисел x, A = {x}, і нехай B є множина всіх дійсних чисел y, B = {y}. Тоді множина M усіх пар (x, y) дійсних чисел x та y має, згідно з цим означенням, потужність, рівну добуткові потужностей C\*C, тобто C2. Але, з іншого боку, всяка пара (x, y) дійсних чисел x та y відповідає точці P(x, y) площини. І оскільки множина всіх точок площини має потужніст континууму, то маємо: C \* C = C2 = C. (3) Через те, що C3 = C2 \* C = C \* C = C і далі C4 = C3 \* C = C \* C = C і так далі, то взагалі Cn = C (4) де, n є натуральне число. Розширимо тепер поняття добутку потужностей. Нехай M1, M2, M3, …, Mn, … є скінченна або зчисленна послідовність яких-небудь множин, що мають потужності відповідно Нехай en є довільний елемент, що належить до множиниMn. Послідовність елементів e = (e1, e2, e3, …, en, …) можна розглядати як новий предмет, і, значить, із цих нових предметів можна скласти якусь множину M, що є сукупністю всіх таких предметів e. Ми можемо визначити потужність  і множини M як добуток потужностей  і написати рівнсть . Нехай тепер кожна з потужностей дорівнює потужності континууму, тобто  . В цьому випадку за множину Mn ми можемо взяти множину всіх дійсних чисел . Тому елемент e = (e1, e2, e3, …, en, …) можна позначити у вигляді дійсних чисел (x1, x2, x3, …, xn, …). Інакше кажучи, множина M елементів e є не що інше, як множина всіх точок P зчисленно вимірного простору. А оскільки вона має потужність континууму, то звідси виводимо формули: C \* C \* C … C … = C (5) або . (6)

**Література**

1. Р.Курант, Г.Роббинс, Что такое математика? Глава II, § 4.

. М. М. Лузін, Теорія функцій дійсної змінної, Розділ І, §7

. Факультативный курс по математике. 7-9 / Сост. И. Л. Никольская. - М : Просвещение, 1991. - С. 109-110. - ISBN 5-09-001287-3.

. І. М. Фішман, Основи теорії фукцій дійсної змінної, Розділ ІІ, §14.

. П. Дж. Коэн, Теория множеств и континуум-гипотеза, Глава IV, § 8.

. М. М. Лузін, Теорія функцій дійсної змінної, Розділ І, §10

. А. А. Болибрух, Проблемы Гильберта (100 лет спустя), Глава 2 Первая проблема Гильберта: континуум-гипотеза, Библиотека «Математическое просвещение», Выпуск