**КУРСОВА РОБОТА**

**Властивості періодів десяткових дробів**

**Вступ**

Актуальність теми дослідження.

На перший погляд, періодичні дроби - це дуже просто, але скільки цікавого та загадкового вони містять в собі. Вперше ми зустрічаємося з ними ще в школі. В шкільній програмі вони вивчаються в курсі шостого класу, але при розв’язанні олімпіадних задач з властивостями періодичних дробів виникають проблеми, оскільки. потрібно знати не тільки найпростіше, але і деякі особливі властивості. Багато видатних учених намагалися знайти ці особливості та довести їх. Для видатного математика Йоганна Бернуллі пошук дільників реп’юнітів було одне із захоплень. Але реп’юніти цікавлять нас не самі, а в зв’язку з періодами десяткових дробів. Бернулі побачив зв'язок між ними і одночасно з таблицею дільників реп’юнітів надрукував огляд відомих на той час результатів періодичних десяткових дробів, які включали в себе просторову таблицю цих періодів.

В курсі вищої алгебри розглядаються лише окремі відомості, що стосуються періодичних дробів, а саме: перетворення раціонального дробу в періодичний десятковий. Однак доволі цікаві властивості періодичних дробів, які значно спрощують розв’язання багатьох олімпіадних задач, залишаються поза увагою.

Мета дослідження: ознайомитись із деякими властивостями періодів десяткових дробів. Відповідно до мети було поставлено наступні завдання:

) Розглянути застосування конгруенцій до перетворення звичайного дробу в десятковий

) Ознайомитись із деякими цікавими властивостями періодів десяткових дробів

) Підібрати приклади для ілюстрації теорії

) Довести Велику теорему Ферма для 

Об’єкт дослідження: періодичні дроби.

Предмет дослідження: властивості періодичних дробів.

Робота складається із вступу, трьох розділів, висновків та списку використаної літератури. Загальний обсяг роботи 27 сторінок.

**1. Перетворення звичайного дробу в десятковий за допомогою конгруенцій**

ферма дріб десятковий конгруенція

**Означення 1**

**Періодичним десятковим дробом називається нескінченний дріб**



**для якого існують такі натуральні числа** **, що**  **для всіх натуральних чисел** **.**

Розглянемо приклади:

. Дріб 2,5436436…=2,5(436) - періодичний, де m=2, а L=3

. Дріб 8,33333…=8,(3) - періодичний, де m=1, а L=1

**Означення 2**

**Періодичний десятковий дріб називається чистим періодичним дробом, якщо його період (група цифр, що повторюється) починається одразу після коми, тобто коли m=1.**

**Означення 3**

**Якщо періодичний десятковий дріб містить ще число між цілою частиною і періодом, то такий періодичний дріб називається мішаним.**

Повернемося до наших прикладів. В першому прикладі дріб 2,5436436…=2,5(436) - мішаний, тому що між цілою частиною і періодом знаходиться цифра 5. А дріб другого прикладу чистий, бо період починається відразу після цілої частини.

Нехай  - звичайний дріб, а, b, (а, )=1 та а < b. Залежно від того чи входять до канонічного розкладу b числа 2 та 5, можливі 3 різні випадки:

1) 

2) 

3) 

Розглянемо ці випадки.

**Теорема1**

Дріб  перетворюється у скінченний десятковий дріб тоді і лише тоді, коли . При цьому кількість десяткових знаків після коми дорівнює більшому із чисел .

Доведення.

Необхідність. Нехай дріб  перетворюється у скінченний десятковий дріб:  Тоді можемо записати: . Після скорочення дробу  в канонічному розкладі знаменника можуть бути лише прості числа 2 та 5, тобто .

Достатність. Нехай . Якщо , то  - скінченний десятковий дріб і в ньому α десяткових знаків після коми.

Якщо , то - скінченний десятковий дріб і в ньому  десяткових знаків після коми. Теорему доведено.

**Теорема2**

Якщо в канонічному розкладі знаменника дробу  немає чисел 2 та 5, то дріб перетворюється в чистий періодичний дріб; при цьому число цифр у періоді дорівнює порядку числа 10 за модулем b.

Доведення.

Перетворити дріб  в десятковий означає представити його у вигляді:



Де  За теоремою 1 дріб буде нескінченним.

В силу того, що



Першу цифру  можна знайти як неповну частку від ділення числа  на . Друга цифра - це неповна частка від ділення числа 10() на , оскільки

.

Перепишемо у вигляді рівностей:



,

,

де  - неповні частки, а - остачі від ділення на число . Жодна із остач не може дорівнювати нулю, оскільки тоді дріб був би скінченним. Крім того, , тому в системі рівностей(1) остачі будуть повторюватись не пізніше ніж через  кроків.

За умовою  Тоді з першої рівності системи (1) випливає, що , звідки  для всіх тобто всі  належать до ЗСЛ().

Нехай - порядок числа 10 за модулем . Оскільки кожна з остач  (в тому числі ) належать до ЗСЛ(), то конгруенція  рівносильна наступним конгруенціям:



Це означає, що через  кроків ділення всі остачі будуть повторюватись і першою повториться остача . Відповідно будуть повторюватись і неповні частки.

Таким чином, дріб буде чистим періодичним, і кількість цифр у періоді дорівнюватиме . Теорему доведено.

**Теорема3**

Якщо канонічний розклад числа  має вигляд 

, то дріб перетворюється у мішаний періодичний; при цьому кількість цифр до періоду дорівнює , а кількість цифр у періоді-порядку числа 10 за модулем с.

Доведення.

Нехай  Розглянемо дріб:



Оскільки ,c, то  Якщо  в силу теореми 2,

 

Тобто твердження теореми виконується.

Якщо , то , де - ціла частина числа , , В силу теоремі 2,  звідки  Оскільки , то дріб  отримаємо перенесенням в числі  коми вліво на  цифр.

Теорему доведено.

**2. Цікаві властивості періодичних дробів**

Ми ознайомилися, з трьома видами періодичних дробів, але навряд чи хтось уявляє скільки несподіванок містять в собі ці дроби. Розглянемо три приклади періодичних дробів:







Не важко замітити, що у дробів  період починається відразу після коми і складається з шести цифр (142857 і 076923 відповідно), а у дробу  він починається з третьої цифри після коми складається з однієї цифри-3. Розглянувши уважно періоди чисел  можна помітити ще одну закономірність. А саме, покладемо N = 142857 (період дробу ) і будемо послідовно множити N на 2,3,4,…:

2N=285714,

N=428571,

N=571428,

N=714285,

N=857142,

N=999999.

Не важко помітити, що перші п’ять чисел утворюються з числа N «шляхом круговою перестановкою» цифр n цифр з кінця «переїжджають» на початок);

А число 7N складається з одних дев’яток. Тепер теж саме зробимо з дробом  (N =076923):

N=153846,

N=230769,

N=307692,

N=384615,

N=461538,

N=538461,

N=615384,

N=692307,

N=769230,

N=846153,

N=923076,

N=999999.

Як, бачимо в цьому випадку виходить трішки по-інакшому, але все одно дуже цікаво:п’ять з цих чисел (3N, 4N, 9N, 10N, 12N) отримується з числа N круговою перестановкою цифр, інші шість чисел(2N, 5N, 6N, 7N, 8N, 11N) отримуються з числа N шляхом кругової перестановки цифр один із одного, і звісно, число 13N складається лише з одних дев’яток.

Можемо спостерігати ще одну цікаву річ, якщо взяти будь-які із виписаних вище шестизначних чисел, крім 999999, «розламати» його на два трьох значних числа і знайти суму цих половинок, то отримаємо 999.

Наприклад, 142+857=999 і т.д.

Дійсно, періодичні дроби містять в собі багато загадкового. Деякі з цих загадок не розв’язані й досі. Багато математиків намагалися вирішити цю проблему, розглянемо деяких таких робіт.

**2.1 Захоплення Йоганна Бернуллі**

Відомий швейцарський математик, професор Гронінгенського (з 1695) і Базельського (з 1705) університетів, почесний член Петербурзької АН. Займався, можна сказати,«дитячою грою»! Він розкладав на прості множники числа, які записуються одними одиницями: 11=11, 111=3∙37, 1111=11∙101 і т.д. В 1773 році Бернуллі поміщає в працях Берлінської академії таблицю простих дільників чисел, складених із n одиниць,- до n=31.

































Незважаючи на те, що йому вдалось знайти дільники для деяких чисел цього виду (n=11,17,29), а для трьох чисел (n=20,25,27) розклад не доведено до простих множників, не зважаючи на деякі помилки з його боку (для n=22,24,26), ми сьогодні можемо тільки схилятись перед гігантською працею вираховування простих множників цих великих чисел.

Протягом перших ста років, які пройшли з часу опублікування таблиці І Бернуллі, в неї не було внесені певні пояснення. В 1838 році Вестербкерг розклав на прості множники число з 11 одиниць - і це все. В 1879 році французький математик Едуард Люка находить прості дільники для n=17 і визнає, що ланцюжок із 19 одиниць не піддається розкладанню.

Цікавість до чисел, які складаються з одиниць, знову виникла в останні роки, в зв’язку з розвитком теорії арифметичних кодів, які є основою для реалізації методів завадостійкого кодування в комп’ютерній техніці. Наші загадкові числа, які протягом двохсот років з дня опублікування першої таблиці з їх дільниками набувають власне ім’я. В «Цікавій теорії чисел» її автор А. Бейлер, присвятив цім числам цілий розділ під назвою «111…1111», вводить для них термін «repunit» (скорочено від англійського repeated unit - повторення одиниць).

Математики і надалі продовжують штурмувати таблицю дільників реп’юнітів і до 1975 року n в таблиці вже досягає 3000 (С.Ейтс), але в ній ще достатньо багато білих плям. (На цей час частина цих білих плям ліквідована і знайдені дільники реп’юнітів до 162 - ого включно). Окрему цікавість представляють прості реп’юніти, пошук яких також продовжується. Вже доведено, що 19-й (1918 р.), 23-й (1929 р.), 317-й (1978 р.) і 1031-й (1985 р.) реп’юніти прості.

Але реп’юніти цікавлять нас не самі по собі, а в зв’язку з періодами десяткових дробів. Зв'язок між ними побачив ще Бернуллі, який одночасно з таблицею дільників реп’юнітів надрукував огляд відомих на той час результатів періодичних десяткових дробів, які включали в себе просторову таблицю цих періодів. Насправді цей зв'язок, як ми зараз побачимо, лежить на поверхні.

**2.2 Дільники реп’юнітів і представлення звичайних дробів десятковим**

Почнемо з трьох простих спостережень.

**Спостереження 1.**

Нехай число 999…999, складається з n дев’яток, ділиться на дане натуральне число m. Запишемо частку від ділення у вигляді п-значного числа: 999…999/, де декілька перші цифри  можуть бути нулями. ТодіДоведення



**Спостереження 2.**

Якщо число m не ділиться на 3, то подільність на m числа, яке складається з n дев’яток, рівносильна подільності на m числа, яке складається з n одиниць (тобто реп’юнітів).

**Спостереження 3**

Якщо число m не ділиться на 2 і на 5, то знайдеться реп’юніт, який ділиться на m.

Доведення. Будемо послідовно знаходити остачу від ділення на m чисел 1,11,111 і т.д. Послідовність цих остач нескінченна, але в той же ж час для них існує тільки m можливих значень (від 0 до m-1). Тому знайдуться два різних реп’юніти з однаковими остачами від ділення на m («принцип Дирихле»!) різниця цих реп’юнітів ділиться на m; і має вигляд

…111 000…000, тобто є похідною якогось реп’юніта на якусь степінь десятки 10k. Але число m взаємно просте з 10k, отже останній реп’юніт ділиться на m.

Звідси випливає важлива теорема.

**Теорема1**

Якщо натуральне число m не ділиться на 2 і на 5, то період десяткового дробу, дорівнює  починається відразу після коми, його довжина дорівнює найменшому n, при якому число, яке складається із n дев’яток ділиться на m, яке записане як n-значне число (можливо з нулями на початку). Якщо m не ділиться і на 3, то можна сказати що, довжина періоду дорівнює номеру першого реп’юніта, яке ділиться на m.

Все це вже нами доведено. З теореми випливає доволі цікавий наслідок.

**Наслідки**

1.Якщо m не ділиться на 2, 3 і 5, то період десяткового дробу, дорівнює , ділиться на 9.

.Якщо взаємно прості, то період десяткового дробу , має таку ж довжину, як період десяткового дробу 

3.Якщо  не ділиться на 3, то при будь якому  період десяткового дробу , ділиться на 9.

Проілюструємо дані твердження прикладами.

**Приклад 1**

Учень, перетворюючи дріб 1/11 в десятковий, отримав наступний результат: 1/11=0,(087). Довести, що учень допустив помилку.

Розв’язання. Оскільки 11 не ділиться ні на 2, ні на 3, ні на 5, то період повинен ділитися на 9. Але 087 не ділиться на 9. Отже, учень допустив помилку.

**Приклад 2**

Порівняйте довжину періоду дробі 

Розв’язання.

Оскільки (3,17)=1, то за наслідком 2, довжина періоду дробу  дорівнює довжині періоду дробу . Отже довжини дробів однакові.

**Приклад 3**

Знайти при якому  період дробу  ділиться на 9. Вважайте, що не ділиться на 3.

Розв’язання. Так як  не ділиться на 3, тоді при будь-якому  період дробу  ділиться на 9.(наслідок 3)

Тепер почнемо вивчати залежність довжини періодів від знаменника. У вивченні цього нам допоможе теорема 1 та мала теорема Ферма.

На відміну від своєї «Великої теореми» П’єр Ферма цю теорему довів, він написав її в одному з листі, теорема формулюється так:

Якщо  - просте число і  - натуральне число, яке не ділиться на  то ділиться на.

Доведення:

За теоремою Ойлера ділиться на . Нехай , а  Підставивши дані, отримаємо:  ділиться на .

**2.3 Довжина періоду дробу з простим знаменником**

**Теорема 2.**

Якщо  є просте число, відмінне від 2 і 5, то довжина періоду дробу  є дільником числа 

ДоведенняВідповідно до теореми 1, довжина періоду є найменше число п таке, що число, яке складається з п дев’яток, ділиться на р. Водночас, за Малою теоремою Ферма число , тобто число, яке складається з  дев’яток, ділиться на . Потрібно довести, що  ділиться на . Якщо , то доводити немає чого; припустимо, що . Числа, які складаються з  і  дев’яток, діляться на ; доповнимо друге з них нулями до  - значного числа і знайдемо різницю отриманих чисел:







Це - число, яке складається із  дев’яток, і воно також ділиться на . Зробивши ще одне подібне віднімання, ми знаходимо, що на  ділиться число, яке складається із  дев’яток, потім - із  дев’яток і т.д. Зрештою ми прийдемо до числа, в якому дев’яток менше, чим , і тут є дві можливості, або це число взагалі буде нуль, але це якраз означає, що  ділиться на . Або в цьому числі дев’яток буде більше 0, але менше ; а це суперечить тому, що  - найменша можлива довжина чисел із дев’яток, які ділиться на . Теорема доведена.

Позначимо для чисел  через L(m) довжина періоду десяткового дробу, дорівнює . Доведено, що якщо  просте, то L(р) є дільником числа . Але який? Подивимося на таблицю І. Бернуллі. Бачимо, що L(3)=1, L(7)=6, L (13)=6, L (17)=16, L (31)=15, L (41)=5 і т.д. Зрозумілості не дуже багато.

З точки зору співвідношень між довжиною періоду дробу і самим  всі прості числа  розподіляють на три категорії:

. «повно періодичні» прості, у яких довжина періоду на 1 менше знаменника: 7 (L=6), 17 (L=16), 19 (L=18), 23 (L=22), 29 (L=28) і т.д.

2. прості з непарною довжиною періоду: 3 (L=1), 31 (L=15), 37 (L=3), 41 (L=5) і т.д.

3. «неповно періодичні» прості з парною довжиною періоду: 11 (L=2), 13 (L=6), 73 (L=8), 89 (L=44), 101 (L=4) і т.д.

Кропітка робота математиків з виявлення якої - не будь закономірності в розташуванні цих груп серед всіх простих чисел стало несподіваним результатом. Було виявлено досить успішне співвідношення чисельності цих груп в пропорції 9:8:7; при цьому були використані таблиці довжини періодів для простих знаменників до 1370471 включно (С.Ейтс, 1975 р.). Були одержані і інші загальні результати, причому виявилось, що велике значення при визначенні довжини періоду з простим  має остачу від ділення числа  на …40. Наприклад, якщо ці остачі дорівнюють 3,27,31,39, то L=(р) парне, а якщо  парне. Але задача для визначення чисел L(р) для простих , як бачимо далека від розв’язання.

**2.4 Випадки непростих знаменників**

**Вправа 4.** Якщо  і  взаємно прості між собою і з 10, то L() є найменше спільне кратне чисел то L() і L().

Оскільки всяке натуральне число є добутком степенів простих, які між собою взаємно прості, останнє твердження зводить задачу обчислення довжини періоду до випадку, коли знаменник є степенем простого числа. А тут знову немає ясності: наприклад, L(3)=1, L(9)=1, L(7)=6, L(49)=42 и т.д.

Тепер потрібно залишити довжини періодів і звернутися до пояснення феноменів, які були виявлені на початку.

**2.5 Ефект кругової перестановки**

Нагадаємо, в чому він полягає. Ми бачили, що шестизначний період дробу при множенні на 2,3,4,5,6 піддається круговій перестановці: скільки - то цифр із кінця числа переїжджає на початок. По іншому веде себе при множенні на різні числа шестизначний період дробу ; саме… Втім, що саме з ним відбувається, ми можемо побачити. Якщо доведемо теорему.

**Теорема 3.**

Нехай N є період дробу  (записаний як число, можливо, який починається одним або декількома нулями), де  взаємно просте з 10, і нехай  є остача від ділення числа  на . Тоді число N виходить із числа N перестановкою  цифр із початку числа в кінець.

Доведення: Нехай M - ціла частина числа тобто =. Помножимо десятковий дріб на ; при цьому кома переїде на  позицією вліво. Ціла части одержаного числа - це . Відкинемо цілу частину. Одержимо число:



Це - періодичний десятковий дріб, період якого виходить із періоду дробу  кругової перестановки цифр:  цифр переїжджає із початку в кінець; але в той же ж час це число в  раз більше числа , а значить, і його період в  раз більше періоду числа  тобто N. Теорему доведено.

Якщо число  має -значний період, то доведена теорема все пояснює. Дійсно, круговою перестановкою цифр із періоду можна одержати  чисел (включаючи його самого), і всі ці числа різні. З іншого боку, коли множимо період на 1,2, … , ми також отримуємо  чисел; значить це в точності теж саме число. Якщо період коротше, то кругова перестановка цифр періоду N не вичерпують всіх чисел виду  з . Все, що можна сказати в цьому випадку - це що кругова перестановка чисел  завжди приводять до числа виду  - це доводиться так само, як теорема 3.

**Теорема 4.**

Нехай N є ціле число (запис якого, можливо, починається нулем або декількома нулями), і нехай  є число, яке складається останніми  цифрами числа N. Припустимо, що при перенесенні  знаків із кінця числа N на початок воно перетворюється в число , де  ціле. Тоді періодичний десятковий дріб 0,NNN… дорівнює  (Останній дріб може бути скоротним)

Доведення: Нехай  - число знаків числа N, при перенесенні  знаків із кінця числа N на початок воно перетворюється в число  таким чином,









що потрібно було й довести.

Отримані міркування можна застосувати до розв’язання наступної олімпіадної задачі.

**Задача.** Знайти всі шестизначні числа, які збільшуються в ціле число раз при перенесенні останньої цифри із кінця на початок.

Ми будемо рахувати, як це звичайно ділиться, що число починається не з нуля; вирішити задачу ми можемо і без цього припущення, але відповідь буде дуже громіздким: він буде включать в себе числа 000001, 000002,…, 000009, 000011, 000013… Ми будемо також розуміти слово «збільшується» буквально, тобто виключимо випадок, коли число залишається при перенесенні цифри незмінним; в іншому випадку у відповідь увійшли б числа 111111, 222222, …, 999999.)

Розв’язання Нехай А - остання цифра нашого числа, і нехай при її перенесенні на початок число збільшується в  раз. Таким чином,

. За теоремою 4 наше число є шестизначний період (можливо він скорочується) дроби  Знаменник цього дробу до скорочення може бути одним із чисел 19,29,39, …, 89; після скорочення на однозначне число знаменник може перетвориться ще в 39:3=13, 49:7=7, 69:3=23. Так як період дробу шестизначний, знаменник повинен бути дільником числа 999999= (теорема 1). Це залишає для нього тільки три можливості: 7,13,39. Таким чином,  дорівнює 4 чи 5. При  =4 наш дріб дорівнює , де  (дріб повинен бути більше 0,1, оскільки період не повинен починатися з нуля). Період такого дробу є  (період дробу є 025641). При  = 5 дріб дорівнює  і повинна скорочуватися на 7, що залишає для неї єдину можливість: ; період дорівнює 142857.

**Відповідь:** 102564,128205,142857,153846,179487,205128,230769.

**2.6 Ефект дев’яток**

**Теорема 5.**

Нехай  - просте число, більше 5, і нехай . Припустимо, що період дробу  є - значне число N. Далі позначимо через  число, утворене першими n цифрами періоду, і через число, яке утворене його останніми n цифрами. Тоді = 999…999 ( дев’яток).

Доведення:

За умовою





Звідси,





Оскільки  є найменше  при якому  ділиться на , а так як  просте, то  взаємно просте з , Значить  ділиться на

. Але в той жеж час  - це  - значні числа, які не обидва складаються із одних девяток. Значить  і таким чином , що і потрібно було довести.

Зазначимо, що  використовувалося тільки в одному місці: виведено із цього, що  взаємно просте з . Зрозуміло, що взаємна простота може настати і при складеному q, так що закінчення даної теореми справедливе і при багатьом інших непростих знаменників.

**2.7 Ще один ефект**

Розглянемо знову період дробу 1/7:N=142857. Піднесемо до квадрату (N=20408122449), відділимо останні шість цифр і складемо з тим що залишиться:122449+20408=142857.

Отримали знову наш період. Зробимо таке саме з період числа 1/17:



Отримали, правда, не наш початковий період, але число відмінне від нього на кругову перестановку цифр.

Аналогічно для періоду дробу 1/19.

**3. Доведення Великої теореми Ферма для** 

**3.1 Доведення Ойлера для n = 3**

У своєму доведенні Останньої теореми Ферма при n = 3 Ейлер застосовує метод нескінченного спуску. Він показує, що якщо можна знайти додатні цілі числа x, y, z, що задовольняють рівнянню , то існують менші додатні цілі з такою ж властивістю; таким чином, у разі можливості розв'язання цього рівняння можна було б знайти спадаючу нескінченну послідовність таких трійок цілих додатних чисел. Зрозуміло, що такої послідовності не існує. Отже, не можна знайти таких чисел x, y, z.

Зрозуміло, що доведення Великої теореми достатньо провести для взаємно простих x і y, якщо  тобто , , і рівняння  зводиться до рівняння , де 

Тоді можливі випадки:

а) x і y - обидва непарні, тоді z-парне.

б) одне з чисел x і y парне, а інше непарне, тоді z-непарне.

В будь-якому разі серед чисел x, y, z, одне парне, а два інші-непарні. Тому достатньо розглянути випадок, коли обидва числа x, y-непарні, оскільки якщо, наприклад, x- парне, то рівняння  зводиться до рівняння , в якому (-y) і z- непарні.

Нехай х і у непарні, тоді, очевидно,  звідки , причому з чисел  і  одне парне, а інше непарне Тоді маємо:  Залишається показати, що число  не може бути кубом цілого числа.

Припустимо, що , тоді , а отже, , звідки  Оскільки числа  і  мають різну парність, то  не ділиться на 2, а тому  Розглянемо рівність: Можливі випадки: а)  3 і б) 

а)  3, тобто ()=1.Оскільки  то  звідки, , а отже, або або . Отже, добуток двох взаємно простих цілих чисел дорівнює кубу, тому кожен із множників є кубом.

Оскільки  є кубом, а числа , де не можуть мати спільного дільника виду (що Ойлер не перевіряє), він робить висновок, що кожний із цих множників є кубом: , звідки





Зауважимо, що оскільки - непарне, то зрозуміло, що -непарне, а - непарні

Іншого боку, , а отже, і  є кубом. Але множники  взаємно прості. Тому кожен із них є кубом. Нехай , тоді , причому  набагато менші за куби . Отже, якби для достатньо великих чисел x, y і z виконувалась рівність  завжди можна було б знайти менші числа f, g і h, для яких . Однак, як відомо, не існує таких кубів серед маленьких чисел, звідки випливає, що їх тим паче немає серед великих чисел.

б) . Тоді , б де оскільки  Повторюючи міркування пункту а), неважко показати,що і в цьому випадку висновок аналогічний.

**.2 Доведення для n = 4 методом нескінченого спуску**

Припустимо, що дано розв’язки x, y, z рівняння . Як і у випадку піфагорових трійок, можна з самого початку вважати, що x, y, z не мають спільних дільників, більших 1, і навіть що ніякі два з них не мають спільних дільників, більших 1. Дійсно, в іншому випадку з рівності  випливало б, що і третє з чисел має той самий дільник і рівняння можна скоротити на четвертий степінь цього дільника. Отже, числа ,  утворюють примітивну піфагорову трійку і, в разі необхідності міняючи місцями , можна написати



де  - взаємно прості числа протилежної парності . Друге з цих рівнянь можна записати у вигляді  і, оскільки  взаємно прості,  - примітивна пифагорова трійка. Таким чином,  непарне, і так як  мають протилежну парність, то  парне. Отже,

,

де  - взаємно прості числа протилежної парності і . Таким чином,



Це показує, що  є квадратом, а саме квадратом половини парного числа . Але  взаємно прості, оскільки будь-яке просте P, яке ділиться на , ділить  (по основній властивості простих чисел), але не обидва цих числа одночасно (так як  взаємно прості), і тому не може ділити . Отже, як , так і  повинні бути квадратами. Однак  є квадратом, а цілі  взаємно прості, тому як , так і  мають бути квадратами, скажімо . Отже,  є квадратом. Тепер для того, щоб привести в рух нескінченний спуск, достатньо зауважити, що з вихідного припущення  ми використовували лише те, що  є квадратом, а не четвертим степенем. Іншими словами, якщо  - такі додатні цілі, що - квадрат, то наведена вище послідовність кроків дає нову пару додатних цілих , таку, що  є квадратом. Крім того, . Тим самим ми вказали нескінченну спадну послідовність додатних цілих чисел, існування якої неможливо. Отже, сума двох четвертих степенів не може бути навіть квадратом, не кажучи вже про четвертий степінь. Це доводить Останню теорему Ферма для четвертого степеня.

**Висновки**

В роботі розглянуто перетворення звичайного дробу у десятковий за допомогою конгруенцій та цікаві властивості періодичних дробів. Підібрані задачі, які ілюструють теорію.

Розглянуто доведення великої теореми Ферма для .

**Список використаної літератури**

ферма дріб десятковий конгруенція

1.Требенко Д.Я. Алгебра і теорія чисел/ Д.Я. Требенко, О.О. Требенко **─** К.:НПУ ім.Драгоманова, 2009. **─** 420 с.

.Столяр В.Г. Удивительное приключение периодических дробей // В.Г. Столяр Квант №8(1989)

.Эдвардс Г. Последняя теорема Ферма/ Г. Эдвардс - М. Мир,1980 **─** 486 с.