# **СОДЕРЖАНИЕ**

# Введение

# Раздел 1. Теоретические основы учебных исследований по математике с использованием динамических моделей

### 1.1 Роль и место учебных исследований в обучении математике

### .2 Структура учебного исследования по математике

Раздел 2. Возможности учебных исследований на динамических чертежах

2.1 Содержание динамических чертежей

### 2.2 Решение динамических задач

# Заключение

# Список литературы

# **Введение**

Учебные исследования занимают особое место в обучении математике и выполняют функции открытия новых знаний, углубления изучаемых знаний, систематизации изученных знаний, развития учащихся и обучения их новым видам деятельности.

При использовании законов геометрии природы в новой ситуации, для изучения курсов предметов, связанных с геометрическими построениями, мы повышаем общую мотивацию к учению. В результате учащиеся заново переосмысливают изученные геометрические законы, развивают геометрическую интуицию.

Кроме того, в процессе выполнения творческих заданий различного содержания, ребята знакомятся с возможными сферами применения геометрических знаний (художниками, архитекторами, дизайнерами и т.д.). Это служит повышению интереса к предмету и осознанному выбору профиля обучения в старшей школе, а опыт и знания, приобретенные в процессе изучения компьютеризированного курса, расширяют геометрические представления учащихся и помогут при дальнейшем их обучении.

Современные компьютерные технологии дают новые возможности в организации исследовательской деятельности учащихся по геометрии. Использование динамических моделей в процессе обучения позволяет выдвигать гипотезы о свойствах заданной геометрической ситуации. При этом в ходе динамики модели характеристические свойства геометрической ситуации должны оставаться неизменными. Например, если исследуются свойства параллелограмма, то данный четырехугольник изначально должен быть построен так, чтобы при изменении модели он оставался параллелограммом. В основу создания модели параллелограмма могут быть положены его определение или признаки. Выше сказанное определяет актуальность темы исследования.

Объект исследования: процесс обучения геометрии в общеобразовательной школе.

Предмет: проектирование учебных исследований на основе использования динамических чертежей.

Цель работы: выявить особенности учебных исследований на основе использования динамических чертежей.

Задачи работы:

1. Выявить роль и место учебных исследований в обучении математике.

2. Изучить возможности динамической среды в организации учебных исследований.

Структура работы. Основная часть работы состоит из 2 глав. Первая содержит теоретические основы проектирования учебных исследований по математике на основе использования динамических моделей. Во второй главе рассматриваются содержание динамических чертежей и методические особенности проектирования учебных исследований.

# **Раздел 1. Теоретические основы учебных исследований по математике с использованием динамических моделей**

### **1.1 Роль и место учебных исследований в обучении математике**

Формирование у школьников интереса к решению задач, проведению математических учебных исследований является важнейшим средством не только развития интереса к математике и ее изучению, но и, вместе с тем. эффективным средством приобщения учащихся к учебной математической деятельности творческо-поискового характера.

Учебные исследования, развивают интерес к математике, приобщают учащихся к самостоятельной поисковой и творческой деятельности математического характера. В процессе этой деятельности учащиеся овладевают навыками наблюдения, экспериментирования, сопоставления и обобщения фактов, делают определенные выводы. Поэтому необходимо создавать условия, способствующие возникновению у учащихся познавательной потребности в приобретении знаний. в овладении способами их использования и влияющие на формирование умений и навыков исследовательской деятельности [5].

Развивающая функция исследовательской деятельности по математике заключается в том, что в процессе ее выполнения происходит усвоение методов и стиля мышления, свойственных математике, воспитание осознанного отношения к своему опыту, формирование черт творческой деятельности и познавательного интереса к различным аспектам математики.

Мотивом учебного исследования может служить интерес, внутреннее противоречие, вызывающее потребность, стремление школьника к исследованию неопределенности, содержащей знания, ранее неизвестные ему. При этом проблемная ситуация является условием возникновения у субъекта деятельности внутреннего противоречия. Фиксация проблемной ситуации (вычленение основного противоречия) заканчивается формулированием проблемы - цели исследования. В учебном исследовании целеполагание становится движущей силой только тогда, когда цель субъективно важна и значительна для участника этого процесса [1].

Большое значение исследованиям в обучении математике уделял известный отечественный педагог-математик Л. Л. Столяр [22. С. 45]. Он предлагал привлекать учащихся к построению маленьких теорий, построение которых основано на модели (рисунок 1), выделяющей три основных аспекта математической деятельности:

). математическое описание конкретных ситуаций или математизация эмпирического материала (МЭМ);

). логическая организация математического материала (ЛОММ), полученного в результате первого аспекта деятельности или построение математической теории;

). применение математической теории (ПМТ ) полученной к результате второго аспекта деятельности.



Рисунок 1. Модель построения математической теории

Представленная модель, разумеется, отражает лишь упрощенно, схематично моделируемый объект, т. е. реальную математическую деятельность.

Математический материал, полученный в качестве описания конкретной ситуации обычно представляет собой конечное множество М={р1,р2,…. рn} предложений. Под ЛОММ следует понимать выявления из М возможно минимального подмножества А (АММ) посылок («локальных аксиом»), из которых можно вывести все остальные предложения М. Следовательно, такая «локальная аксиоматика» ЛОММ (в рамках небольшой темы) и означает построение маленькой теории.

Таким образом, три основных аспекта модели выполняют различные функции: решение проблем первого аспекта дает новые знания; решение проблем второго аспекта приводит эти знания в систему; решение проблем третьего аспекта раскрывает новые возможности применения этой системы знаний.

Необходимо исходить из реальных ситуаций и задач, возникающих как в самой математике, так и вне математики, чтобы ими мотивировать необходимость дальнейшего развития математических знаний. В последнем случае подобные исследования часто начинаются с поиска математического языка для описания рассматриваемой ситуации, изучаемого объекта, построения его математической модели. Построенная модель подлежит затем исследованию с помощью соответствующей теории (если она уже построена). Или для этой цели необходимо дальнейшее развитие теоретических знаний, построение теории изучаемого объекта. И, наконец, построенная теория с помощью различных интерпретаций применяется к новым объектам.

Описание исследований осуществляется в виде решения нескольких серий задач на доказательство, связанных общей идеей ЛОММ. Организованная таким образом работа способствует получению эквивалентных определений изучаемого понятия и систематизации знаний. А. А. Столяр отмечает, что если преподавание нацелено на организацию рассуждений учащихся с тем, чтобы они были в состоянии открывать для себя те факты, которые составляют содержание предложений системы, а затем и логически упорядочить их, то это приводит к более быстрому развитию мышления учащихся и к пониманию изучаемого материала.

Процесс организации, методические особенности работы учителя, пути активизации исследовательской деятельности учащихся, были предметом изучения Е. В. Ларькиной [17]. Ее идея заключается в решении исследовательских заданий, которые предполагают формирование, например, такого элемента исследовательской деятельности как организация полного и сокращенного перебора возможных вариантов решения. Метод решения подобного задания состоит в полном переборе всех возможных вариантов решения. По окончании решения задания учащиеся обобщают полученный результат. Пути активизации деятельности учащихся в ходе решения такого задания предлагаются следующие: учащиеся подбирают вопросы к условию задания с целью поиска метода решения, записывают ход своих рассуждений, аргументируют свои действия; учитель, в свою очередь, организует дискуссию, разбивает задание на подзадачи, выступает в роли оппонента в ходе дискуссии, корректирует действия учащихся, организует повторную дискуссию.

А.А. Окунев [23] полагает, что навыки исследовательской работы формируются в том случае, когда ученик является активным участником поиска нескольких способов решений одной задачи. Это может происходить и на лабораторно-практических занятиях, и в процессе изучения теоретического материала на уроке, и в ходе самостоятельных домашних исследований. При этом исследования организуются с целью обнаружения законе- мерностей, выявления свойств фигур и т. П. Мнение А. А. Окунева разделяют Э. Г. Готман и 3. А. Скопец [8]. Они считают, что. Решая одну и ту же задачу различными методами, можно лучше исследовать специфику того или иного метода решения, его преимущества и недостатки в зависимости от содержания задачи. Ученые утверждают, что. В ходе решения данной задачи нужно стремиться к тому, чтобы научиться сразу видеть тот или иной способ пригодный для ее решения. Нередко найденный способ решения может быть полезен в дальнейшем для решения более трудных задач. Решение задач, допускающих вариативность решений - увлекательная работа, требующая знания многих разделов школьной математики.

Идею поиска различных способов решений одной задачи продолжают Г. Домкина и Г. Лаптева [13], которые демонстрируют возможность применения почти всей планиметрии (15 способов решения) в одной геометрической задаче.

Н. И. Зильберберг [16] рекомендует в каждой учебной теме выделять отдельным пунктом исследовательские задания школьников и указывает несколько путей привлечения учащихся к исследовательской деятельности: работу с утверждениями следует строить по специальной схеме; полезна работа со статьями из журналов и книг; следует организовывать самостоятельное открытие теорем и получать новые признаки изученной фигуры.

Е. В. Баранова [5] считает, что учебные исследования целесообразно организовывать, во-первых, при выявлении существенных свойств понятий, установлении связей данного понятия с другими; во-вторых, при изучении теоремы: ознакомлении с фактом, отраженном в теореме, доказательстве теоремы (в том числе с разными способами), обобщении теоремы, составлении обратной теоремы и проверке ее истинности, установлении связей данной теоремы с другими.

Анализ научно-методических источников показывает, что учебные исследования целесообразно включать в процесс обучения: а) выявления существенных свойств понятий или отношений между ними; б) установления связей данного понятия с другими; в) выделения частных случаев некоторого факта в математике: г) обобщения различных вопросов: д) классификации математических объектов. Отношений между ними, основных фактов данного раздела математики; е) решения задач различными способами; ж) отличия ошибочных рассуждений от правильных; з) составления новых задач, вытекающих из решения данных; и) работы над формулировкой и доказательством математического утверждения и т. д.

Работы таких методистов-исследователей, как Э. Г. Готмана, В. А. Далингера, Г. В. Дорофеева, А. А. Окунева, Н. М. Рогановского, Н. В. Толпекиной и других, посвященные привлечению учащихся к исследовательской деятельности в процессе решения задач, подтверждают, что результатом такой работы является не только развитие исследовательских умений и творческой самостоятельности учащихся, но и закрепление полученных знаний, их углубление, систематизация и обобщение.

В настоящее время учебные исследования используются преимущественно для достижения развивающих целей обучения, поскольку они являются мощным инструментом формирования мышления, так как: обладают большими потенциальными возможностями для развития умственных операций; формируют активность и целенаправленность мышления; развивают гибкость мышления; формируют культуру логических рассуждений; способствуют овладению исследовательскими методами математических знаний; развивают творческую самостоятельность.

К основным дидактическим функциям учебных исследований В. А. Далингер и Н. В. Толпекина [9] относят следующие функции:

функцию открытия новых (неизвестных ученику) знаний (т. е. установление существенных свойств понятий; выявление математических закономерностей; отыскание доказательства математического утверждения и т. П.);

функцию углубления изучаемых знаний (т. е. получение определений. Эквивалентных исходному; обобщение изученных теорем; нахождение различных доказательств изученных теорем и т. п.);

функцию систематизации изученных знаний (т. е. установление отношений между понятиями; выявление взаимосвязей между теоремами; структурирование учебного материала и т. п.);

функцию развития учащегося, превращение его из объекта обучения в субъект управления, формирование у него самостоятельности к самоуправлению (самообразованию, самовоспитанию, самореализации);

функцию обучения учащихся способам деятельности.

### **.2 Структура учебного исследования по математике**

Эффективное использование учебных исследований при обучении математике предполагает знание их структуры и назначения ее основных компонентов. Для этого обратимся к анализу точек зрения психологов, педагогов, математиков и методистов, относящихся к исследуемой нами проблеме.

Обычно в психологических описаниях процесса мышления отмечается, что его началом является постановка вопроса; первая фаза - это выявление задачи (или проблемы); далее человек выдвигает те или иные гипотезы, осуществляет их проверку (практическую или умственную), сопоставляет гипотезы и результаты их проверки, вносит коррекции и т. д. Завершается мыслительный процесс решения задачи ответом на вопрос. Очень часто завершаемым моментом данного процесса является постановка нового вопроса.

Отметим, что далеко не всегда человек легко и просто «видит» вопросы (проблемы, задачи), которые перед ним ставятся. Его нужно учить умению «видеть» вопросы и тем более формулировать гипотезы и проверять их.

Многими психологами отмечается, что в процессе мышления объект как бы поворачивается разными сторонами, и, это позволяет выявить его скрытые свойства (С. Л. Рубинштейн); в ходе деятельности с объектом возникают не только прямые, но и побочные продукты, обнаружение которых дает толчок к творческому решению задачи (Я. А. Пономарев); важным моментом процесса мышления является умственный эксперимент.

Г. Реверш [10] перечисляет 4 фазы творческого процесса:

) подготовительная фаза (овладение материалом и концентрация мысли на творческой задаче);

2) инкубационная фаза - неосознанная работа еще неоформленной мысли;

) творческая интуиция - нахождение принципа решения в еще неясной форме;

) оформление творческого замысла.

Наиболее отчетливо компоненты учебного исследования были выделены еще Генрихом Пестолоцци, который создал систему обучения, основанную на наблюдении, обобщении этих наблюдений и выработке понятий. Впоследствии эти основные компоненты уточнялись как зарубежными, так и отечественными педагогами и методистами. Например, В. Ю. Ульянинский и К. П. Ягодовский, характеризуя исследовательскую работу в ее школьном применении как самостоятельное решение разного рода вопросов, выделили этапы: 1) непосредственного активного наблюдения, 2) самостоятельного экспериментирования исходного и проверочного, и 3) самодеятельного творческого воспроизведения. Н. В. Новожилова отмечает, что для учебного исследования в научной сфере характерны такие этапы:

) постановка проблемы;

) изучение информации по этой проблематике;

) выбор методов исследования и практическое овладение ими;

) сбор собственного материала;

) анализ и обобщение;

) формулирование выводов.

В работах педагога Б. Е. Райкова определен исследовательский метод как «метод умозаключения от конкретных фактов, самостоятельно наблюдаемых и изучаемых школьниками», и выделены следующие стадии этого процесса:

) наблюдение и постановка вопросов;

) построение предположительных решений;

) исследование предположительных решений и выбор одного из них как наиболее вероятного;

) проверка гипотезы и окончательное ее утверждение.

Определив сущность исследовательского метода. И. Я. Лернер

выделяет следующие этапы учебного исследования:

) наблюдение фактов и явлений;

) выяснение непонятных явлений, подлежащих исследованию;

) изучение фактов, связанных с такими явлениями;

) объяснение этих фактов;

) фактические выводы, требующие приложения знаний о данном факте или явлении.

А. К. Маркова [19] в качестве этапов учебного исследования предлагает следующее:

) повторение и заучивание известных способов решения задач (репродуктивная деятельность);

) постановка проблемы;

) выдвижение гипотез;

) проверка гипотез и определение выводов;

) самостоятельный поиск новых проблем и новых способов их решения (творческая, продуктивная мыслительная деятельность).

Несмотря на различную терминологию, употребляемую разными авторами, нетрудно выделить то общее содержание, которое ими раскрывается, то есть схему исследования: наблюдение - проблема - эксперимент - вывод. Но этими авторами процесс познания нового рассматривался применительно к любому школьному предмету. Для нас интерес представляют учебные исследования при изучении математики.

Рассмотрим, какие этапы математических учебных исследований выделяются в методической литературе по математике. Так. М.Д. Касьяненко представляет общую схему математического исследования следующим образом:

а) изучение связей между рассматриваемыми объектами; поиск других объектов, имеющих общие свойства с данными;

в) построение новых понятий и гипотез:

г) проверка гипотез и понятий:

д) систематизация полученных результатов;

е) отыскание границ их применимости.

Г. К. Муравин [20] представляет самостоятельные исследования учащихся по математике в виде следующего относительно завершенного исследовательского цикла: наблюдение - гипотеза - проверка гипотезы.

Применительно к процессу обучения математике в средней школе, А. Е. Захарова и Г. Б. Лудина к основным компонентам учебного исследования относят:

постановку проблемы исследования;

осознание его целей:

предварительный анализ имеющейся информации по рассматриваемому вопросу;

условия и методы решения задач, близких к проблеме исследования;

выдвижение и формулировка исходной гипотезы;

анализ и обобщение полученных в ходе исследования результатов;

проверка исходной гипотезы на основе полученных фактов;

окончательная формулировка новых результатов, свойств, закономерностей;

определение места найденного решения поставленной проблемы в системе имеющихся знаний.

О.Б. Епишева выделяет такие этапы проведения учебного исследования:

организация условий для возникновения проблемной ситуации или создание проблемной ситуации;

определение проблемы и ее формулировка:

поиск путей решения проблемы, выделение частных проблем;

выдвижение различных гипотез, коллективное и индивидуальное решение проблемы, проверка его правильности и исправление ошибок.

Анализ научных источников показал, что различия в содержательной стороне выделенных разными авторами этапов учебного исследования и их количестве, объясняются существованием различных видов математических исследований.

Рассматривая исследования определенного вида, каждый автор выделяет этапы, наиболее характерные именно для него. Однако легко заметить, что многие из них отражают одну и ту же суть. Так, например, этапы - наблюдение, изучение связей между данными объектами, анализ имеющейся информации можно объединить в один этап учебного исследования, суть которого в изучении и анализе заданной ситуации. С данным этапом напрямую связана постановка проблемы исследования. В одних случаях с проблемы начинается исследование, а в других проблема есть результат наблюдений за данными объектами.

Проблема, как категория дидактической логики, определяется как «знание о незнании», как некоторую разновидность вопроса, ответ на который не содержится в накопленном знании и поэтому требует соответствующих действии по получению новых знаний ,«Процесс формулировки проблемы, - отмечает М. И. Махмутов, - означает, что ученик понимает возникшую перед ним задачу и в известной мере видит.. пути ее решения» [21, с. 112].

Под учебной проблемой понимается отражение логико-психологического противоречия процесса усвоения, определяющее направление умственного поиска, пробуждающее интерес к исследованию сущности неизвестного и ведущее к усвоению нового понятия или нового способа действия. Проблема в обучении используется в тесной связи с проблемной ситуацией, которая определяет начальный момент мышления, вызывающий познавательную потребность ученика и создающий внутренние условия для активного усвоения новых знаний и способов деятельности [13]. Нередко ; задача, которая является проблемно-поисковой при изучении школьного курса математики (учебной проблемой), когда-то возникала как научная проблема. Проблемная задача отличается от проблемы тем, что в ней заведомо ограничено поле поиска решения.

В качестве психологической основы проблемного обучения обычно … называют сформулированный С. Л. Рубинштейном тезис: «Мышление начинается с проблемной ситуации». Проблемная ситуация, в свою очередь, является базой, источником для построения математических задач.

Однако и не всякая проблемная ситуация порождает процесс мышления. Он не возникает, в частности, когда поиск путей разрешения проблемной ситуации непосилен для учащихся на данном этапе обучения в связи с их неподготовленностью к необходимой деятельности. Это чрезвычайно важно учесть, чтобы не включать в учебный процесс непосильных задач, способствующих не развитию самостоятельного мышления, а отвращению от него и ослаблению веры в свои силы.

Из анализа научных источников, посвященных проблемному обучению, следует, что признаками учебной проблемы являются:

) порождение проблемной ситуации (в науке или в процессе обучения);

) определенная готовность и определенный интерес решающего к поиску решения;

) возможность неоднозначного пути решения, обусловливающая наличие различных направлений поиска.

Проблемная ситуация порождается учебной ситуацией, которая содержит две группы элементов: известные и неизвестные (или новые). Постановка проблемы преследует следующие дидактические цели: привлечь внимание ученика к данному вопросу (задаче); возбудить у него познавательный интерес и другие мотивы деятельности; поставить ученика перед таким посильным познавательным затруднением, преодоление которого активизировало бы его мыслительную деятельность; указать ученику на противоречия между возникшей у него познавательной потребностью, с одной стороны, и невозможностью ее удовлетворения посредством имеющегося запаса знаний, умений и навыков - с другой.

Проблема зарождается только в результате детального анализа ситуации. Ясного расчленения известного и неизвестного. Успех формулировки проблемы, четкость ее постановки зависят, прежде всего, от понимания смысла возникающих вопросов, которые являются логической формой выражения проблемы. В результате большой аналитико-синтетической работы уясняется смысл неизвестного и формулируется (или осознается в готовой формулировке) учебная проблема. В этом заключается суть анализа проблемной ситуации и формулировки проблемы учеником.

Составление плана решения поставленной проблемы зависит от умения и опыта школьника в предвидении следующих шагов. Смутно представляя для себя результат решения, ученик мысленно забегает вперед, фиксируя последовательность своих действий на основе опыта решения проблем вообще, имеющихся знаний, или пытается путем догадки на основе интуитивного мышления добиться частичного или полного решения. В итоге такой попытки возникает идея, предположение о принципе, на котором оно основано. Однако предположение не всегда оказывается приемлемым способом решения возникшей проблемы. Часто только одно из многих предположений может содержать гипотезу.

Гипотезой может считаться, как правило, только обоснованное предположение. В теории обучения гипотеза является психолого-дидактической категорией, которая служит учителю средством активизации мыслительной деятельности ученика, а для ученика она является приемом творческого воображения и принципом решения учебной проблемы [14]. Этап выдвижения гипотезы считается всеми учеными важным и необходимым для учебного исследования, и отмечают, что выдвижение гипотезы возможно только на основе тщательного изучения фактов, явлений, условий задачи (проблемы).

Раскрывая этапы учебного исследования, все авторы единодушны в том, что после выдвижения гипотезы обязательно должен следовать этап ее проверки (подтверждения, доказательства, обоснования или опровержения). Если для строгого доказательства гипотезы у ученика не хватает имеющихся знаний, то иногда ограничиваются ее подтверждением с помощью правдоподобных рассуждений.

Следовательно, для доказательства гипотезы учащиеся должны уметь проводить анализ предложенного учителем учебного материала, выделять в нем главные элементы, сравнивать, сопоставлять, синтезировать, обобщать и делать необходимые выводы. Главное, что ученик должен уметь держать в уме основную цепочку рассуждений и не терять цель анализа фактов (условий). Если ученик нацелено строит цепочку рассуждений, то он «ощущает потребность» (или сразу может заметить) того, чего не хватает в имеющихся фактах или в личном учебном материале для достижения поставленной цели. Тогда ученик будет искать дополнительные факты, прибегать к помощи учителя или самостоятельно добывать необходимую информацию из различных источников.

Таким образом, анализ этапов исследований позволяет сделать вывод, что обязательными из них являются четыре (рисунок 2), которые и образуют основную структуру учебного исследования:

) постановка проблемы;

) выдвижение гипотезы;

) проверка гипотезы;

) вывод.



Рисунок 2. Структура учебного исследования

При более детальном анализе структуры учебного исследования можно выделить и такие его этапы, как:

) мотивация учебной деятельности;

) постановка проблемы исследования;

) анализ имеющейся информации по рассматриваемому вопросу:

) экспериментирование (проведение измерений, испытаний, проб и т. д.) с целью получения фактического материала;

) систематизация и анализ полученного фактического материала;

) выдвижение гипотезы;

) подтверждение или опровержение гипотез:

) доказательство гипотез.

Очевидно, что различные виды исследований имеют свои особенности, поэтому для каждого из них характерно свое сочетание названных этапов. В контексте нашего исследования немаловажным является рассмотрение вопроса о видах учебных исследований. Приведем различные подходы ученых. В зависимости от способа выдвижения гипотезы Е. В. Баранова [5] выделяет следующие виды учебных исследований: интуитивно-опытные; опытно-индуктивные; индуктивные; дедуктивные. О. В. Охтеменко [24] выделяет три вида учебных исследований: урок-исследование, мини-исследование, исследовательский комплекс.

«Урок-исследование» - это исследовательское задание, в выполнении которого заняты все учащееся класса, рассчитанное на целый урок и содержащее все или большинство исследовательских компонентов; его выполнение является обязательным для всех учащихся.

«Мини-исследование» выполняется всеми или большинством учащихся, предлагается в качестве домашнего задания, включает лишь отдельные исследовательские компоненты; по усмотрению учителя его выполнение является обязательным или добровольным.

«Исследовательский комплекс» выполняется отдельными учащимися исключительно добровольно: задания может быть предложено как продолжительное домашнее задание, содержит все или большинство исследовательских компонентов.

**Раздел 2. Возможности учебных исследований на динамических чертежах**

**.1 Содержание динамических чертежей**

Динамические чертежи - это компьютерные геометрические чертежи-модели, исходные данные которых можно варьировать с сохранением всего алгоритма построения, т.е. один чертеж позволяет работать с целым семейством однородных конфигураций. Программы, с помощью которых создаются такие модели, называют программами динамической геометрии или «интерактивными геометрическими системами» (ИГС). В настоящее время их насчитывается более полутора десятков, одной из первых и наиболее распространенных является The Geometer's Sketchpad (в русских версиях - «Живая Геометрия» и «Живая Математика»).

Кроме элементарных чертежных инструментов - виртуальных циркуля и линейки, ИГС дают пользователю возможность быстрого выполнения таких простейших построений, как проведение перпендикуляров и параллелей к данным прямым, нахождение середин отрезков, и более сложных - геометрических преобразований, построений в координатах. Как правило, базовый инструментарий ИГС включает и команды построения однопараметрических семейств объектов, в частности геометрических мест точек. Набор команд можно расширять, создавая собственные макросы. Большинство ИГС позволяют вставлять в чертежи текстовые комментарии, а некоторые предоставляют средства для создания своего рода математических презентаций. Обобщая опыт применения богатого инструментария ИГС (см., в частности, [11]), в этой заметке мы попробовали дать классификацию динамических чертежей с точки зрения их роли и путей использования в учебном процессе.

Прежде всего, можно выделить три основных «ипостаси» динамических чертежей:

) иллюстрации (и презентации) фактов и рассуждений;

) виртуальная лаборатория, своего рода «установка», позволяющая проводить математические эксперименты, исследовать заданные математические ситуации;

) инструментальная оболочка для выполнения заданий на конструирование.

Для каждого из этих видов чертежей можно указать несколько «подвидов»; они описаны ниже.

.Чертежи иллюстративного характера.

Иллюстрации к определениям, фактам, условиям задач. Это простейший тип чертежей, аналогичный рисункам в учебнике, но отличающийся более высоким качеством, а главное, возможностью увидеть на одном чертеже целый класс фигур. Современные программы позволяют показывать не только плоские конфигурации, но и пространственные фигуры с трехмерными эффектами - невидимыми гранями, вращением и т.п., а также модели физических объектов и явлений - шарнирные механизмы, оптические системы и др.

Иллюстрации к задачам с визуальными подсказками. Поиск решения подлинно содержательной, красивой геометрической задачи требует умения анализировать чертеж, находить связи между его элементами, вносить в чертеж новые элементы - дополнительные построения, которые выявляют такие связи. (Именно в этом, а не в сообщаемом учащимся наборе сведений автору видится основная ценность элементарной геометрии в современной школе.) Динамические чертежи открывают новые возможности для развития этих умений. Инструментарий современных программ позволяет закладывать в рисунок спрятанные подсказки, которые можно вызвать, нажав соответствующую виртуальную кнопку. Такой подсказкой может быть как возникающее на картинке дополнительное построение, так и выделение равных или подобных фигур, показ значений тех или иных величин, анимированное преобразование фигуры и др. Особенно важно, что такие подсказки носят невербальный характер, т.е. учащийся должен еще понять, что ему показали и как этим воспользоваться. Тем самым развивается геометрическое воображение, интуиция, умение воспринимать разные формы представления информации.

Пошаговые демонстрации рассуждений. На таких чертежах имеется последовательность кнопок, раскрывающая доказательства, построение или ход вычисления шаг за шагом и сопровождающая их текстовыми комментариями. При этом пользователь может (или даже должен) производить с чертежом некоторые действия. Чертежи этого типа могут заменять фрагменты учебника, и особенно полезны при самоподготовке.

Задания с проверкой ответа. Аналитический аппарат некоторых ИГС позволяет создавать внутри чертежа окна для ввода числовых ответов и проверять их средствами самой системы. Такие окна можно вставлять в пошаговые демонстрации, существенно активизируя работу учеников.

.Задания на эксперимент и исследование. В заданиях этого типа ученикам предъявляется законченная модель, некоторые элементы которой можно перемещать (как правило, не выполняя новых построений).

«Сделать геометрическое открытие». Варьируя чертеж, учащиеся обнаруживают закономерности в поведении фигуры (например, инвариантные величины), на основе чего формулируются теоремы или выделяются некоторые классы объектов и, далее, даются их определения.

«Черный ящик». Наблюдая за изменениями одних элементов чертежа при перемещении других элементов, учащиеся должны разгадать скрытый связывающий их «механизм». Пример: дана (подвижная) фигура и ее образ при некотором движении; требуется указать вид движения и его параметры.

Экстремальные задачи. Задачи на максимум и минимум, решаемые экспериментально. Интересна разновидность этих заданий, в которой на одной странице находятся рассматриваемая геометрическая фигура и график исследуемой геометрической величины. Такие модели устанавливают прямую и наглядную связь между геометрией и алгеброй.

Линии уровня. В некоторых ИГС имеется возможность параметрического форматирования объектов, которое в частности, позволяет закрашивать точки плоскости цветом, зависящим от их координат. Таким образом, нетрудно получить, например, карту линий уровня заданной функции. Это открывает широкие возможности для постановки и выполнения оригинальных экспериментальных заданий, связанных с геометрическими местами точек, рассматриваемых как задачи о линиях уровня, экстремальных задач.

.Задания на конструирование. В этих заданиях учащиеся строят фигуры, пользуясь инструментарием виртуальной геометрической лаборатории.

Задачи на построение. По формулировке это обычные задачи на «евклидовы построения», но компьютерная специфика придает им новые качества. Прежде всего, построение должно быть проведено от начала до конца и абсолютно точно. Это вырабатывает правильное понимание того, что значит «решить задачу на построение», а заодно и понимание того, что такое алгоритм. Далее, на готовом построении можно провести экспериментальное исследование, варьируя данные (отметим, что при работе «с карандашом и бумагой» исследование в задачах на построение нередко игнорируется). Вариация данных обеспечивает и (само)контроль решения. Обычно компьютерное задание на построение представляет собой комплект, в который, кроме чертежа с условием и данными, входит и чертеж с решением, часто без словесных пояснений, которые должны восстановить учащиеся (см., например, раздел, посвященный геометрическим построениям, в [12]). Такие «комплекты» обеспечивают уровневую дифференциацию при работе с одной и той же задачей.

Задачи на построение с автоматической проверкой. По своему первоначальному замыслу ИГС создавались как открытые среды, рассчитанные на работу с открытыми заданиями. Поэтому в большинстве ИГС автоматическая проверка правильности построений не предусмотрена; среди наиболее распространенных ИГС исключение составляет лишь программа Cinderella. Однако с учетом традиций нашей школы процедура автоматической проверки безусловно полезна, и приходится создавать специальные инструменты для этого - на каждом чертеже отдельно.

Построения со специальными наборами инструментов. Изменяя набор применяемых инструментов, из одной и той же задачи можно сделать несколько задач совершенно разного геометрического содержания. Например, задача из стандартного учебника «построить точку, симметричную данной относительно середины данного отрезка» при решении циркулем и линейкой служит просто для усвоения понятия центральной симметрии, но если разрешить пользоваться только линейкой и инструментом для проведения параллельных или только циркулем, она приобретает новый, более интересный смысл, активизирует владение определением и свойствами параллелограмма и может послужить «затравкой» для проектной работы о построениях ограниченными средствами.

Построение геометрических мест точек. В обычных задачах на ГМТ требуется не столько «построить», сколько «найти» задаваемое указанным условием ГМТ. В их компьютерном варианте используется команда рисования «следа» точки, движущейся на экране; при этом геометрическое место именно строится. Точнее, строится его произвольная точка, описывающая искомую кривую при изменении определяющей ее положение на ГМТ «ведущей точки». Опыт работы с заданиями этого типа позволил сделать любопытное наблюдение: учащиеся, научившиеся строить ГМТ на компьютере, начинают применять, и с успехом, те же приемы при решении аналогичных задач на бумаге. В заданиях этого типа могут рассматриваться не только «элементарные ГМТ» (прямые и окружности), но и более сложные кривые: коники, заданные различными геометрическими условиями, циклоиды и т.д., а также семейства прямых, окружностей и других фигур.

Построения на шаблонах. Наиболее яркий пример этого вида заданий - задачи на построение сечений, выполняемые на «вращающихся» моделях геометрических тел.

Построение моделей. Каждую модель-иллюстрацию или модель для исследования, о которых говорилось в пп. 1) и 2), можно рассматривать как объект самостоятельного конструирования «с чистого листа». При этом может и должен применяться весь спектр функциональных возможностей системы: всевозможные инструменты для построений, команды форматирования, кнопки управления презентациями. Этот вид деятельности может использоваться при работе над проектными заданиями, для подготовки печатных отчетов по ним и т.п.

Разнообразие типов динамических чертежей и основанных на них заданий, возможность уровневой дифференциации открывают широкие перспективы внедрения ИГС в учебный процесс, качественного обновления методики преподавания геометрии.

Динамические чертежи могут служить инструментальной средой для исследовательской работы учащихся на уроке (или дома) «с чистого листа». При этом перед учениками ставятся проблемы, задачи построения и исследования определенных объектов, в ходе решения которых и должны достигаться те или иные учебные цели.

Использование динамической среды в таком качестве отвечает самым современным педагогическим концепциям. Однако, это предполагает качественную перестройку учебного процесса, в том числе подготовку новых учебников и пособий, рассчитанных на проектную, поисковую деятельность учащихся, переподготовку учителей.

Для образовательных учреждений, имеющих государственную аккредитацию, по условиям лицензионного соглашения допускается установка и одновременное использование одного приобретенного комплекта ИГС на нескольких компьютерах образовательного учреждения.

ИГС может использоваться для создания конкретных моделей-заданий, содержащих объяснение материала, заготовки геометрических объектов, тексты с условиями и чертежи с данными, пошаговые планы построений и т.п. информацию. После чего ученики работают не с ИГС как таковой, а с этими готовыми моделями.

Динамическая среда позволяет создавать анимированные и интерактивные объекты и использовать их в учебном процессе даже при отсутствии интерактивной доски. Обширные функциональные возможности позволяют использовать динамическую среду как виртуальную лабораторию для демонстрации динамических моделей и для самостоятельной работы учащихся по их созданию и исследованию.

Динамические чертежи разделить на три типа в соответствии с характером деятельности учащихся при работе с ними.

· Чертежи-иллюстрации (и презентации) фактов и рассуждений. Такого рода чертежи, прежде всего, используются при объяснении материала учителем; при этом ученики по отношению к ним выступают, в основном, пассивными потребителями информации. В данном случае преимущества ИГС перед, например, обычными графическими редакторами заключаются в удобстве инструментария, специально предназначенного для создания и демонстрации геометрических конструкций. Весьма важно и то, что один динамический чертеж фактически представляет собой целое семейство однотипных конфигураций. На рисунке 3. показана иллюстрация к теореме Фейербаха об окружности девяти точек в «развернутом виде», выполненная с помощью МК (при ее демонстрации элементы конструкции и текст появляются по шагам, что позволяет проследить за построением и акцентировать внимание на свойствах фигуры).



Рисунок 3. иллюстрация к теореме Фейербаха об окружности девяти точек в «развернутом виде»

математика геометрия динамический

· Чертежи-модели, предназначенные для проведения экспериментов, исследования конструкций, которые обычно даются в готовом виде и не предполагают проведения учениками собственных построений. Здесь в полной мере проявляются возможности, заложенные в динамическом характере моделей: наблюдая за изменением картинки при вариации данных, можно выявить как скрытые в ней закономерности, т.е. самостоятельно «открыть» какую-то теорему, так и причины, их обуславливающие, т.е. увидеть идею доказательства. На рисунке 4. Изображена модель, позволяющая обнаружить, что треугольник A1B1C1 является правильным для любого данного треугольника ABC (т.е. «открыть» так называемую теорему Наполеона).



Рисунок 4. Теорема Наполеона

· Задания на построение, в которых учащимся предлагается построить те или иные фигуры, пользуясь виртуальными инструментами. Наряду с традиционными задачами на построение циркулем и линейкой, приобретающими в компьютерной версии особую специфику, в частности, требующими от решающего абсолютной четкости и полноты решения, к таким заданиям относятся и, например, задания на «трехмерных» вращающихся изображениях пространственных фигур, задания на построение геометрических мест и др.

Подводя итог, выделим следующие виды учебных исследований по математике на основе динамических моделей:

) «открытие» математических фактов на основе наблюдений готовых динамических моделей;

) самостоятельное создание динамических моделей с заданными характеристиками.

**2.2 Решение динамических задач**

Динамические задачи занимают важное место в курсе геометрии. Данная тема богата по содержанию, по способам и приемам решения динамических задач, по возможностям ее применения при изучении ряда других тем школьного курса геометрии. Это объясняется тем, что широко используются в различных разделах геометрии, при решении важных прикладных задач.

*Пример 1:*

Какие значения может принимать отношение:

а) периметра треугольника к его наибольшей стороне;

б) суммы углов треугольника к его наибольшему углу?

*Решение.* А) полагая    то для положения на рисунке 1 имеем:

 (*треугольник стремится стать равносторонним*),

.

Для положения на рисунке 2: (неравенство треугольника), (треугольник стремится стать отрезком), .



б) Наибольший угол (или два наибольших угла из трех) может изменятся в пределах от  (но не равен ) до  (и не равен ), поэтому отношение суммы углов треугольника к его наибольшему углу может находиться только в интервале от 1 до 3.

*Ответ:* а) (2; 3); б) (1;3).

*Пример2:*

Для всех равнобедренных треугольников найти множество значений отношения периметра к боковой стороне.

*Решение.* Для положения на рисунке 3:  . Для положения на рисунке 4: , .



*Ответ:* (2; 4).

Преподавание геометрии не может обойтись без наглядности. В тесной связи с наглядностью обучения находится и его практичность. Обучение не должно быть перенасыщено иллюстрациями, схемами, таблицами и другими формами наглядности, но в некоторых труднодоступных вопросах применение наглядности необходимо.

*Пример 3:*

Для всех прямоугольных треугольников найти множество значений отношения медиан, проведенных к катетам.

*Решение. Первый способ* решения - «протащить» вершину прямого угла вдоль полуокружности (рисунок 5) от одного конца диаметра (гипотенузы) к другому, рассмотрев при этом два предельных положения.



В первом положении , , , .

Во втором положении , , , .

Изменение отношения  при переходе от первого положения ко второму следует рассмотреть на наглядно-интуитивном уровне, изобразив рисунками несколько последовательных промежуточных положений (включая ) и отметив при этом уменьшение одной медианы  и увеличение другой .

*Второй способ* решения состоит в привлечении алгебры:

, ,

.

Отсюда ясно, что отношение  уменьшается при увеличении .

Если , то .

Если то .

*Ответ:**.*

Методические рекомендации по решению задачи:

1. Для решения данной задачи необходимо знать, прежде всего, что такое окружность, полуокружность, диаметр, прямоугольный треугольник, катеты, гипотенуза, медиана, свойства медианы. Так же для решения задачи вторым способом, т. е. с привлечением алгебры, необходимо знать теорему Пифагора.

. В ходе решения задачи отрабатываются умения анализировать условие задачи, правильность построения рисунка, логическое мышление. Работа учителя должна быть направлена на то, чтобы учащиеся осознали, что если в задаче точно не определены особенности геометрической конструкции, то для полного решения такой задачи необходимо рассмотреть все возможные случаи взаимного расположения элементов конструкции и других ее особенностей. На начальных этапах знакомства с такими задачами, когда учащиеся еще не имеют достаточного запаса приемов решения подобных задач, представляется важным обучение рассмотрению различных ситуаций, выявлению существенных фактов, влияющих на конкретную геометрическую ситуацию.

Систематическая организация подобной работы будет способствовать развитию конструктивного мышления и такого компонента творческого мышления как гибкость.

. Так как в школьном курсе геометрии динамических задач нет, наглядное решение таких задач можно использовать для изучения либо закрепления нового материала. Задачу, решенную первым способом, необходимо рассмотреть при изучении прямоугольного треугольника, его элементов (7 класс). Задачу, решенную вторым способом, необходимо рассмотреть при изучении теоремы Пифагора (8 класс). Так же можно подобрать ряд задач для самостоятельного исследования, с целью более глубокого понимания методов решения динамических задач. Разработать факультативный курс.

# **Заключение**

Графические средства отображения информации широко используются во всех сферах жизни общества. Графические изображения характеризуются образностью, символичностью, компактностью, относительной легкостью прочтения. Именно эти качества графических изображений обусловливают их расширенное использование.

В ходе исследования поставленные задачи решены, цели достигнуты, получены следующие результаты и выводы:

) выявлены роль и место учебных исследований в обучении математике;

) изучены возможности динамической среды в организациях учебных исследований; программы динамической геометрии позволяют быстро создавать высококачественные чертежи и добиваться требуемого расположения их элементов, не перерисовывая чертеж. Но большую ценность, чем быстрое построение и вариации чертежа, составляет то, что наблюдая изменения чертежа, можно выделить те его свойства, которые сохраняются при динамике. Благодаря этому, модели, созданные в динамической среде, становятся инструментом для геометрических открытий и уникальным дидактическим средством. Смоделировав подобный эксперимент заранее, учитель может подвести учеников к открытию «новых» фактов.

Сказанное позволяет увидеть уникальность и универсальность учебной дисциплины для развития познавательных способностей человека, расширения круга используемых мыслительных средств и умственных операций, что, в свою очередь, повышает адаптивные возможности человека.

Все перечисленное показывает необходимость рассматривать географическое образование как необходимую составляющую содержания общего образования.

# **Список литературы**

1. Андреев В. И. Эвристическое программирование учебно-исследовательской деятельности: Методическое пособие. - М.: Высшая шк., 1981. - 240с.

2. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. Часть первая. М.: Просвещение, 1986. - 268с.

3. Аргунов Б.М., Балк М.Б. Элементарная геометрия. М.: Просвещение, 1986. - 422 с.

. Бахман Ф.М. Построение геометрии на основе понятия симметрии. М.: Просвещение, 1969. - 356 с.

5. Баранова Е. В. Методические основы использования учебных исследований при обучении геометрии в основной школе: Автореф. дис. канд. иед. наук. - Саранск, 1999. - 17 с.

6. Богоявленский Д. Н., Менчинская Н. А. Психология усвоения знаний в школе. - М.: РЛП РСФСР, 1959. - 348 с

7. Вольхин К.А. Астахова Т.А. Геометрические основы построения чертежа. Геометрическое черчение. Электронное учебное пособие. Новосибирск, 2004

8. Готман Э. Г., Скопец 3. А. Задача одна - решения разные. - Киев: Род. шк., 1988. - 173 с.

. Далингер В. А., Толепкина Н. В. Организация и содержание поисково- исследовательской деятельности учащихся по математике: Учеб. пособие - Омск: Изд-во ОмГПУ, 2004. - 263 с.

10. Дадаян А.А. Основы черчения и инженерной графики. Геометрические построения на плоскости и в пространстве. М.: Изд-во Форум, 2007. - 464 с.: ил.

11. В.Н. Дубровский и др., "Математика, 5-11 класс. Практикум", ЗАО "1С", 2004.

12. В.Н. Дубровский и др., Интерактивные стереочертежи к учебнику А.В.Погорелова, www.mto.ru/katal/index.html (сайт РЦ ЭМТО).

13. Домкина Г., Лаптева Т. В одной задаче - почти вся планиметрия/ Математика в школе. - 1983. - №6. - 34-36 с.

14. Емельянов А.Е. Универсальная геометрия в природе и архитектуре. (Симметрия, гармония, абсолютные системы отсчета). Донбасс, 1990.

15. Зайкин М.И. От задач к заданию - в глубину познания.

16. Зильберберг Н. Л. Урок математики: подготовка и проведение: Кн. для учителя. - М.: Просвещение: АО «Учебная литература», 1995. - 178 с.

. Ларькина Е. В. Методика формирования элементов исследовательской деятельности учащихся основной школы на уроках геометрии: Автореф. дис. канд. пед. наук. - М., 1996. -17 с.

. Рассудовская М. М. Домашние задания творческого характера // Математика в школе. - 1984. - №5. - 28-30 с.

. Маркова А К. Психология труда учителя. Кн. для учителя. М.: Просвещение, 1993. - 192 с.

20. Муравин Г. К. Исследовательские работы в школьном курсе алгебры // Математика в школе. - 1990. - № 1. - С. 43-44.

21. Махмутов М. И. Организация проблемного обучения в шкопе. - М. Просвещение, 1977. - 240 с,

. Столяр А. А. Педагогика математики: Учеб. пособие для физ. - мат. фак. пед. А. А. Столяр 3-е изд., перераб. и доп, - Минск: Высшей шк., 1986. - 413 с

. Окунев А. А. Спасибо за урок, дети!: О развитии творческих способностей учащихся: Кн, для учителя: из опыта работы. - М.: Просвещение, 1988. - 128 с.

24. Охтеменко О. В. Исследовательские задания как средства познавательного интереса и развития учащихся на уроках геометрии в основной школе: Автореф пед. наук. - М., 2003. - 18 с.