МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГАОУ ВПО «ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Факультет естественнонаучного и математического образования

Кафедра геометрии и методики преподавания математики

КУРСОВАЯ РАБОТА

Задачи на максимум и минимум в геометрии

Исполнитель:

Щелчкова К.В.

Ростов-на-Дону

Оглавление

Введение

. Задача на экстремум в математике

.1 История решения задач на экстремум

.2 Понятие задачи на экстремум

.3 Методы решения задач на экстремум

.4 Примеры геометрических экстремумов

. Знаменитые задачи на максимум и минимум

.1 Задача Кеплера

.2 Задача Фаньяно

.3 Задача Дидоны

.4 Задача Ферма - Торричелли - Штейнера

Заключение

Список литературы

Приложения

Введение

Данная работа посвящена рассмотрению темы «Задачи на максимум и минимум в геометрии».

Задачи на максимум и минимум в геометрии или, как их называют по - другому, задачи на экстремум в геометрии можно признать особенно важными для самой математике и ее приложений. О таких задачах писал великий русский математик П.Л. Чебышев. Он указывал, что «практическая деятельность человека представляет чрезвычайное разнообразие, и для удовлетворения всех ее требований, разумеется, недостает науке многих и различных метод. Но из них особенную важность имеют те, которые необходимы для решения различных видоизменений одной и той же задачи, общей для всей практической деятельности человека: как располагать средствами своими для достижения по возможности большей выгоды?» [2, 6] П. Л. Чебышев добавляет: «Решение задач этого рода составляет предмет так называемой теории наибольших и наименьших величин. Эти задачи, чисто практического характера, имеют особенную важность и для теории: все законы, определяющие движение материи весомой и невесомой, представляют решение задач этого рода. Нельзя не заметить особенно благотворного влияния их на развитие наук математических». [2, 6]

Задачи на экстремум используются не только в алгебре или геометрии, но они часто встречаются и в природе.

Охарактеризуем методологический аппарат исследования:

· объект исследования: задачи на экстремум;

· предмет исследования: решение задач на минимум и максимум в геометрии;

· цель исследования заключается в рассмотрении задач на экстремумы, рассмотрение истории, понятий и методов решения задач на экстремум;

· задачи исследования:

. изучить представленную научную литературу;

. описать историю решения задач на экстремум;

. описать понятия задач на экстремум;

. рассмотреть методы решения задач на экстремум;

. рассмотреть задачи Кеплера, Фаньяно, Дидоны, Ферма - Торричелли - Штейнера;

· структура курсовой работы:

Курсовая работа состоит из введения, двух частей, заключения и списка литературы. Общий объем курсовой работы составляет 35 страниц. Из них 29 страниц основной текст, 1 страницы список литературы.

Во введении: обосновывается актуальность исследования, определяются объект и предмет курсовой работы, формулируется цель, указываются задачи исследования.

Первая часть: посвящена теоретическому материалу по задачам на экстремум, выявлению основных понятий и методов решения.

Вторая часть: посвящена решению исторических геометрических задач.

В заключении: обобщены результаты исследования, удовлетворяющие поставленным во введении задачам.

В приложении представлены: биография Иоганна Кеплера и решена задача на экстремум.

1. Задача на экстремум в математике

.1 История решения задач на экстремум

Экстремальными задачами человек интересуется с античных времен. В Древней Греции уже давно (во всяком случае до VI века до н.э.) знали об экстремальных свойствах круга и шара: среди плоских фигур с одинаковым периметром наибольшую площадь имеет круг (среди пространственных фигур с одинаковой площадью поверхности (решение изопериметрической экстремальной задачи); шар имеет максимальный объем (решение изопифанной экстремальной задачи). История сохранила легенду о следующей самой древней экстремальной задаче, известной как задача Дидоны. Финикийская царевна Дидона (IX век до н.э.) решила организовать поселение на берегу понравившегося ей залива в Северной Африке. Она уговорила вождя местного племени отдать ей клочок земли, который можно охватить воловьей шкурой. Воины Дидоны разрезали шкуру на тонкие полоски, и Дидона охватила ремнем, составленным из этих полосок, участок земли на берегу залива. Так возник город Карфаген. Задача Дидоны состоит в указании формы границы участка, имеющей заданную длину, при которой площадь участка максимальна. Если знать экстремальное свойство круга, то решение получается немедленно: граница участка представляет часть окружности, имеющей заданную длину. Экстремальными задачами занимались многие античные ученые (Евклид, Архимед, Аристотель и др.). Известна следующая задача Евклида (IV век до н.э.): в заданный треугольник ABC вписать параллелограмм ADEF наибольшей площади. Нетрудно доказать, что решением этой задачи является параллелограмм, вершины D, E, F которого делят соответствующие стороны треугольника пополам.

После гибели античной цивилизации научная жизнь в Европе стала возрождаться только в XV веке. Задачи на экстремумы оказались среди тех, которыми интересовались лучшие умы того времени. Если в античные времена задачи на экстремумы исследовались только геометрическими методами и каждая задача для своего решения требовала специфического приема, то в XVII веке появились общие методы изучения задач на экстремумы, которые привели к созданию дифференциального и интегрального исчислений. Первые элементы математического анализа были созданы И. Кеплером (1615 год), который так описывает появление своего открытия: "Мне как хорошему хозяину следовало запастись вином. Я купил его несколько бочонков. Через некоторое время пришел продавец - измерить вместимость бочонков, чтоб назначить цену на вино. Для этого он опускал в каждый бочонок железный прут и, не прибегая ни к какому вычислению, немедленно объявлял, сколько в бочке вина". После размышлений Кеплер открыл секрет такого простого способа измерения объема бочек. Оказалось, что бочары за долгую историю научились изготавливать бочки такой формы, при которой они имели наибольший объем при заданной длине мокрой части прута. А поскольку в окрестности максимума значения функции изменяются мало (в этом суть открытия И. Кеплера), то торговец вина почти не ошибался при объявлении объема бочки по одному измерению.

Открытое И. Кеплером основное свойство экстремумов было затем оформлено в виде теоремы сначала П. Ферма (для многочленов), потом И. Ньютоном и Г.В. Лейбницем для произвольных функций и носит теперь название теоремы Ферма, согласно которой в точке экстремума x0 непрерывной функции f (x) производная функции равна нулю:

С тех пор исследование функций с помощью анализа бесконечно малых величин стало одним из мощнейших математических методов и привело к созданию современного математического анализа.

.2 Понятие задачи на экстремум

Экстремум (лат. extremum - крайний) в математике - максимальное или минимальное значение функции на заданном множестве. Точка, в которой достигается экстремум, называется точкой экстремума. Соответственно, если достигается минимум - точка экстремума называется точкой минимума, а если максимум - точкой максимума.

Функция y = f(x) называется возрастающей (убывающей) в некотором интервале, если при x1 < x2 выполняется неравенство (f(x1) < f(x2) (f(x1) > f(x2)).

Точка x0 называется точкой локального максимума (минимума) функции f(x), если существует окрестность точки x0, для всех точек которой верно неравенство f(x)  f(x0) (f(x) ≥ f(x0)).

Точки максимума и минимума называются точками экстремума, а значения функции в этих точках - ее экстремумами.

Необходимые условия экстремума. Если точка x0 является точкой экстремума функции f(x), то либо f '(x0) = 0, либо f (x0) не существует. Такие точки называют критическими, причем сама функция в критической точке определена. Экстремумы функции следует искать среди ее критических точек.

Первое достаточное условие. Пусть x0 - критическая точка. Если f '(x) при переходе через точку x0 меняет знак плюс на минус, то в точке x0 функция имеет максимум, в противном случае - минимум. Если при переходе через критическую точку производная не меняет знак, то в точке x0 экстремума нет.

Второе достаточное условие. Пусть функция f(x) имеет производную f '(x) в окрестности точки x0 и вторую производную в самой точке x0. Если f '(x0) = 0,

f”(x0) > 0, то точка x0 является точкой локального минимума (максимума) функции f(x). Если же f”(x0) = 0, то нужно либо пользоваться первым достаточным условием, либо привлекать высшие производные.

Экстремальные задачи - задачи на максимум и минимум - во все времена привлекали внимание учёных. Из попыток решить ту или иную экстремальную задачу возникали и развивались новые теории, а иногда и целые направления математики.

Максимумы и минимумы постоянно возникают в инженерных расчётах, в архитектуре, экономике и т.д. Кроме того, экстремальные задачи самым неожиданным образом находят применение в науках о природе: физике, химии, биологии. Давно уже было замечено, что окружающий мир во многом устроен по экстремальным законам. Леонард Эйлер (1707-1783), один из величайших математиков, говорил: «В мире не происходит ничего, в чём бы не был виден смысл какого-нибудь максимума или минимума». С экстремальными задачами человек начинает знакомиться в средней школе. Вот, пожалуй, самая известная из них: на плоскости дана прямая l и точки A и B по одну сторону от неё. Найти на прямой точку M, для которой сумма AM + BM наименьшая.

Для решения отразим точку B относительно прямой l, получим точку B′.



Рисунок 1

Отрезок BM переходит при симметрии в отрезок B′M, следовательно, AM + BM = AM + B′M. Согласно неравенству треугольника, сумма AM + B′M принимает наименьшее значение, когда точка M лежит на отрезке AB′. Таким образом, M - точка пересечения прямой l с отрезком AB′; для этой точки сумма AM + BM равна длине отрезка AB′, при другом выборе точки M эта сумма будет больше AB′.

С её помощью можно объяснить закон отражения света «угол падения равен углу отражения», поскольку в однородной среде свет распространяется по кратчайшему пути. Кроме того, эта простая задача лежит в основе так называемых фокальных свойств конических сечений - эллипса, гиперболы и параболы.

Считается, что впервые задача о кратчайшем пути между двумя точками с заходом на прямую, или задача об отражении света, была решена древнегреческим математиком Героном Александрийским (I век н. э.) в трактате «О зеркалах». Поэтому её иногда называют задачей Герона. Её можно интерпретировать и как сугубо практическую: где на прямой дороге нужно поставить автобусную остановку, чтобы суммарный путь до неё от деревень A и B был наименьшим?

.3 Методы решения задач на экстремум

Различны и многообразны приёмы и методы решения задач на экстремумы, как аналитические (перебора, оценки, неравенств и др.) так и геометрические (преобразование плоскости, оценка, перебор). Каждый метод по - своему уникален и неповторим. Эти приёмы можно отнести к элементарным, т.к. они не предполагают применения математического анализа, а ограничиваются алгебраическим или геометрическим подходом к решению задачи на экстремум. Каждый их таких элементарных приемов является мостиком к решению не большого класса задач на экстремум. Кроме того, применение этих методов для ряда задач будет более рационально, чем использование инструментов математического анализа.

Рассмотрим основные методы решения задач на экстремумы и их применение при решении конкретных задач.

Общий прием решения задач на экстремум опирается на теорему Ферма: Если функция y = f(x) (имеющая производную) при х ~ х0 принимает локальный максимум или минимум, то производная от этой функции при х = х0 обращается в 0.



Рисунок 2

Геометрически это означает, что касательная к графику функции в соответствующей точке его параллельна оси ОХ.

Теорема Ферма очень наглядна. И все же докажем ее.

Пусть х0 - точка максимума функции у = f (x), то есть при х = х0 эта функция принимает наибольшее значение. Дадим х0 достаточно малое положительное приращение h. Новое значение аргумента х0 + h будет достаточно близким к х0, и так как при х = х0 данная функция имеет максимум, то (xo + h) - f(х0)0. Поэтому , а значит .

Если же дать х0 отрицательное приращение (достаточно малое по абсолютной величине), то получим: f(х0 + h) - f(х0)  0 и , а значит,  0.

Оказалось, что одно и то же число f'(x) не положительно и неотрицательно. Это означает, что это число равно 0, то есть f’(х0) = 0. Рассуждения в случае минимума аналогичны.

Решение задач на экстремумы с помощью основного метода.

Чтобы проиллюстрировать рассмотренный общий прием решения задач на экстремумы, возьмем пример задачи о прямоугольнике наибольшей площади.



Рисунок 3

Из куска, стекла, имеющего указанные на рисунке форму и размеры, нужно вырезать прямоугольную пластину наибольшей площади.

Площадь пластины S = ху. За независимое переменное примем

х (0х100). Тогда из подобия треугольников ABE и CDE следует:  или , откуда у = х + 80. Поэтому S = х2 + 80х. Исследуем эту функцию на экстремум. S' = х + 80, х + 80 =0, х = 200.

Найденное значение х выходит из промежутка изменения х. Поэтому внутри этого промежутка стационарных точек нет. Значит, наибольшее значение S принимает в одном из концов промежутка, а именно при х = 100 мм, а тогда у = 60 мм и S = 6000 мм2.

1.4 Примеры геометрических экстремумов

Если обратиться к геометрическим задачам на экстремумы, решаемым с помощью геометрических средств, то окажется, что используемые здесь приемы особенно разнообразны. Для нахождения экстремумов геометрических величин могут быть использованы многие теоремы геометрии.



Рисунок 4

Задача 1. Дан угол ABC и внутри него точка D. Требуется построить треугольник, две вершины которого лежали бы соответственно на сторонах данного угла, а третьей вершиной была бы точка D, и который имел бы наименьший периметр.

Возьмем произвольный треугольник DKL, две вершины которого лежат соответственно на сторонах ВА и ВС, а третьей вершиной служит точка D (рис. 3). Построим точки Е и F симметричные точке D относительно сторон угла ВА и ВС, и соединим отрезками прямой эти точки соответственно с вершинами К и L треугольника. Так как КЕ = KD и LF = LD, то длина ломаной EKLF равна периметру треугольника DKL. Но нас интересует треугольник с наименьшим периметром, а наименьшим будет периметр, равный длине отрезка EF. Поэтому вершины К1 и L2 искомого треугольника определяются как точки пересечения прямой EF со сторонами данного угла (рис. 4).

Задача 2. Какой из треугольников с двумя данными сторонами имеет наибольшую площадь?



Рисунок 5

Построим отрезок АС, равный одной из данных сторон. Из конца его Л, как из центра, радиусом, равным второй данной стороне, опишем окружность. На этой окружности возьмем произвольную точку В (не лежащую на прямой АС). Соединив эту точку В отрезками с точками Л и С, получим треугольник с двумя данными сторонами (рис. 4). Из всех таких треугольников наибольшую площадь будет иметь тот, у которого высота hb будет наибольшей. Но наибольшее возможное значение высоты равно длине радиуса окружности (АВ1). Поэтому наибольшую площадь из всех треугольников с двумя данными сторонами имеет такой, в котором эти стороны образуют прямой угол.

Задача 3. Внутри угла А дана точка О. Требуется провести прямую через точку О так, чтобы она отсекла от угла А треугольник с наименьшим периметром. Впишем в данный угол окружность, проходящую через данную точку О (из двух таких окружностей возьмем ту, радиус которой больше, рис. 5). Через точку О проведем касательную MN к этой окружности. Эта касательная и отсечет треугольник наименьшего периметра. Докажем это. Проведем через О какую-нибудь иную прямую ED, пересекающую стороны угла (она пересечет и дугу ВОС). Сравним периметр треугольника AED с периметром треугольника AMN.



Рисунок 6

Для этого построим еще касательную KL к дуге ВОС, параллельную ЈD. Сравним периметры треугольников AMN и AKL. Они равны, так как каждый из них равен сумме отрезков АВ и АС. Но периметр треугольника AED больше периметра треугольника AKL, а значит, больше и периметра треугольника AMN.

Задача 4. Внутри угла А дана точка О. Требуется провести через О прямую так, чтобы она отсекла от угла треугольник наименьшей площади.



Рисунок 7

Искомой прямой будет такая прямая ВС, отрезок которой, заключенный между сторонами угла, делится точкой О подолам (рис. 6). Для доказательства построим еще какую-нибудь прямую, проходящую через О и пересекающую стороны угла. Сравним площади треугольников ABC и AED, Если через С провести прямую, параллельную ЕВ, то получим треугольник OCF, равный треугольнику ЕВО, Поэтому площадь треугольника OCD больше площади треугольника ОЕВУ и, значит, площадь треугольника ABC меньше площади треугольника AED.

Задача 5. Дан треугольник ABC и внутри него две точки D и Е (рис. 7). Как кратчайшим путем пройти из одной точки в другую, побывав на каждой стороне треугольника?

Выполним следующее построение. Построим точки D1 и Е1 симметричные D и Е относительно АС и ВС.



Рисунок 8

Построим также точку D2, симметричную D1 относительно АВ. Проведем отрезок D2E1 и построим ломаную DMKLE. Длина ее равна длине отрезка D2E1. Легко сообразить, что всякий иной путь из D в Е, с тем же порядком захода на стороны данного треугольника, будет длиннее. Но можно было бы порядок захода на стороны треугольника избрать иной (выполнив такие же построения). Всего таких ломаных линий, как DMKLE, получится три. Останется выбрать из них имеющую наименьшую длину, для чего достаточно сравнить три таких отрезка, как D2E1.

Задача 6. Рассмотрим еще задачу об экономном расходовании материалов. Попытаемся установить, для какой крыши (двускатной или четырехскатной) потребуется больше кровельного материала.



Рисунок 9

Будем считать, что оба ската двускатной крыши наклонены к горизонтальной плоскости под углом , скаты 1 и 2 четырехскатной крыши - под тем же углом , а 3 и 4 - под углом  (рис. 8). При этих предположениях и указанных на чертеже размерах площадь двускатной крыши будет равна S1 =  , а четырехскатной - S2 = .

Для сравнения этих площадей рассмотрим разность S2 - S1 = bm( Здесь b > 0, m > 0, 0 < < 90° и 0 <  < 90°. Поэтому при  <  получим S2 - S1 < 0, при  =  будем иметь S2 - S1 = 0, а при >  S2 - S1 < 0. Следовательно, если все скаты как двускатной, так и четырехскатной крыш будут одинаково наклонены к горизонтальной плоскости, то кровельного материала понадобится одинаково на обе крыши. Если же скаты 3 и 4 четырехскатной крыши будут иметь больший угол наклона, чем скаты 1 и 2, то для четырехскатной крыши кровельного материала понадобится больше, чем для двускатной, а при меньшем угле - меньше.

2. Знаменитые задачи на максимум и минимум

.1 Задача Кеплера

«По обе стороны от места наибольшего значения убывание вначале нечувствительно». - И. Кеплер.

«Когда историю жизни Кеплера сопоставляешь с тем, кем он стал и что он сделал, радостно изумляешься и при этом убеждаешься, что истинный гений преодолевает любые препятствия», - писал Гёте. [4, 51]

Кеплер описывает событие из своей жизни, случившееся осенью 1613 года, в книге «Стереометрия винных бочек». «В ноябре прошлого года я ввел в свой дом новую супругу в то время, когда Австрия, закончив обильный сбор благородного винограда, распределяла свои богатства. Весь берег в Линце был завален винными бочками, продающимися по сходной цене. Поэтому ко мне на дом было принесено и поставлено несколько бочек, а через четыре дня пришел продавец и промерил подряд все кадки, без различия, не обращая внимания на форму, без всяких соображений и вычислений. Медный наконечник линейки просовывался через наливное отверстие полной бочки поперек до пятки того и другого деревянного круга, которые мы по - домашнему называем днищами, и после того, как в обоих случаях эта длина от верхней точки до нижней того и другого дощатого круга оказывалась равной, продавец объявлял количество амфор, вмещаемых бочкой, заметив лишь число на линейке в том месте, на котором оканчивалась заданная длина. Я удивился». Кеплеру показалось странным, как с помощью одного измерения можно вычислить вместимость бочек разной формы. «Я, как новобрачный, счел для себя подходящим, - пишет далее Кеплер, - взять новый предмет математических занятий, и исследовать геометрические законы такого удобного в домашнем хозяйстве измерения, и выяснить его основания, если таковые имеются». Для выяснения «такого рода оснований» Кеплеру пришлось заложить основы дифференциального и интегрального исчисления, а заодно выдвинуть новые идеи для решения задач на максимум и минимум. Ключевое место в книге «Стереометрия винных бочек» занимает теорема V части второй: «Из всех цилиндров, имеющих одну и ту же диагональ, самым большим и вместительным будет тот, в котором отношение диаметра основания к высоте равно ».

Иначе говоря, в этой теореме дается решение следующей задачи: вписать в заданный шар цилиндр наибольшего объема. К нему естественно примыкает планиметрический вариант: вписать в заданный круг прямоугольник наибольшей площади.



Рисунок 10

Первую из сформулированных задач мы называем далее задачей Кеплера, вторую - планиметрической задачей Кеплера. Сначала решим задачу Кеплера методом, которым решил бы ее Тарталья. Пусть шар имеет радиус R. Половину высоты цилиндра обозначим через х. Тогда радиус г основания цилиндра равен и объем цилиндра равен 2(). А у Тартальи было .

Тогда из формулы предыдущего рассказа получим, что максимальное х’ = , r’ =  = R. Таким образом, отношение диаметра основания экстремального цилиндра к высоте равно .

Но Кеплер именно так и сформулировал, как мы видели, свой результат. Кеплер мог бы воспользоваться своей же идеей о нечувствительности изменения функции вблизи максимума. Но он прошел мимо этой возможности и дал чисто геометрическое решение. Вопрос о наиболее вместительном цилиндре, вписанном в шар, Кеплер сводит к решению следующей задачи на максимум: из всех прямоугольных параллелепипедов с квадратными основаниями, вписанных в шар, куб имеет наибольший объем. Этот результат доказан в теореме IV части второй книги Кеплера.

Прямоугольные параллелепипеды с квадратными основаниями Кеплер называет коротко столбами. Возможны два случая:

а) столб выше куба;

б) столб ниже куба.



Рисунок 11

Пусть куб ABCDEFGH и «столб» A’B’C’D’E’F’G’H’ вписаны в одну и ту же сферу.Сравним их объемы. Из куба «выпирают» два параллелепипеда с квадратными основаниями: сверху A’B’C’D’A’’B’’C’’D’’ и равный ему по объему нижний параллелепипед. При этом от куба «отнимается» гораздо больше. Усмотреть это совсем просто: у каждой стороны квадрата A’’B’’C’’D’’ прилегает к столбу параллелепипед с квадратным основанием, равным (конгруэнтным) самому квадрату A’’B’’C’’D’’.

Один из таких параллелепипедов мы обозначили A”B”QRMNPL. Уже эти четыре параллелепипеда занимают больший объем, чем выпирающие части столба. Действительно, объем выпирающих частей равен 2|А”В”|2 |А”А’|, а объем четырех прилегающих параллелепипедов равен 4|А”В”|2 |А”М|. Действительно, объем выпирающих частей равен 2|А”В”|2 |А”А’|, а объем четырех прилегающих параллелепипедов равен 4|А”В”|2 |А”М|. Но |А”М| = Теперь рассмотрим треугольник А’АА”. Угол  = А’АА” опирается на дугу А’С, угол  = АЕС опирается на большую дугу АС. Значит,  < , и, следовательно, |А”А’| : |А”А| = tg < tg= |CA| : |АЕ| = . Получаем, что

|А”В”| 2 |A"A| < 2|A”B”|2 |A"A|  = 2|А”В”| 2  |A”M| = 4|А”В”|2|А”М|. Нужное неравенство для объемов доказано.

Остается разобрать случай б) (рис. 12). Пусть снова куб ABCDEFGH и столб A’B’C’D’E’F’G’H’ вписаны в одну и ту же сферу (точки Н, D’, H' на рис. 12 не видны). Сравним их объемы. Из столба выпирают два параллелепипеда с квадратными основаниями общим объемом 2|АВ|2|АА”|. Объем части столба, выпирающей из куба, меньше. Кеплер доказывает это так. Приложим, говорит он, к каждой боковой стороне куба параллелепипед толщины, равной толщине выпирания столба. (На рис. 6 изображен один из четырех таких параллелепипедов ABFEPQRS.) Их общий объем равен



Рисунок 12

|АВ|2|АР| = . И снова, рассмотрев треугольники АА'А” и АЕС, устанавливаем, что угол  больше угла , и значит, |АА"|:|А”А”| >. Но, как справедливо отмечает Кеплер, если прилепить к кубу четыре параллелепипеда, то они все - таки не закроют всего столба, будут «зиять» четыре параллелепипеда у ребер (один из них - B”LB’OF”MF’N (точка F” не видна). Каждый из этих параллелепипедов составляет часть столбиков, вытянувшихся у каждого из ребер АЕ, BF, CG и DH. Объем каждого такого столбика равен |АВ||АР|2. Но когда мы приложили к каждой грани параллелепипед, то они «выдаются за высоту столба восемью столбиками» (один из этих восьми - BQPATA”B’.

Объем каждого из восьми столбиков равен |АВ| |АР| |АА”|. Очевидно, неравенство 2|АА”| > 2|А”А’| = 4|АР|, из которого следует, что четыре столбика у ребер также уступают в объеме выделяющимся восьми параллелепипедам. Итак, «выпирает» из столба объем 2|АБ|2|АА”| > 4|АВ|2|АР|, а из куба меньше, чем 4|АВ|2|АР| - 8|АВ||АР||АА”| + 4|АB||АР|2 < 4|АВ|2|АР|. Итак, куб больше теряет, чем приобретает. Вспомогательная задача решена. Остальное совсем просто. В каждый цилиндр можно вписать столб и отношение объема цилиндра к объему вписанного столба постоянно и равно. Значит, наибольшим по объему является цилиндр, в который можно вписать куб. А у него отношение высоты к диаметру основания равно. Доказав эту теорему, Кеплер пишет: «Отсюда ясно, что австрийские бочары как бы по здравому и геометрическому смыслу при построении бочки соблюдают правило, чтобы за радиус днища брать треть длины клепок. Именно при таком устройстве цилиндр, мысленно построенный между двумя днищами, будет иметь две половины, весьма близко подходящие к условиям теоремы V, и потому будет самым вместительным, хотя бы при постройке бочки от точных правил несколько и отступили, потому что фигуры, близкие к оптимальной, очень мало меняют свою вместимость..., ибо по обе стороны от места наибольшего значения убывание в начале несущественно».

.2 Задача Фаньяно

В начале XVIII века итальянский инженер и математик Фаньяно деи Тоски (1682-1766) поставил следующую задачу: вписать в данный остроугольный треугольник ABC треугольник наименьшего периметра так, чтобы на каждой стороне треугольника ABC лежала одна вершина треугольника.

Воспользуемся приёмом: с помощью движений плоскости попробуем выстроить стороны вписанного треугольника в ломаную линию. Тогда периметр будет не меньше отрезка, соединяющего концы этой ломаной. А наименьший периметр будет соответствовать случаю, когда стороны ломаной лежат на одной прямой.



Рисунок 13

Итак, пусть точки A1, B1, C1 лежат на сторонах треугольника ABC (A1- на стороне BC и т. д.). Отразим точку A1 симметрично относительно сторон AB и AC, получив точки A2 и A3 соответственно рис. 7. Длина трёхзвенной ломаной A3B1C1A2 равна периметру треугольника A1B1C1. Для того, чтобы периметр был наименьшим (равным отрезку A2A3), нужно, чтобы вершины B1 и C1 лежали в точках пересечения отрезка A2A3 со сторонами треугольника AB и AC. Осталось понять, как выбрать точку A1 на стороне BC таким образом, чтобы длина отрезка A2A3 была наименьшей. Для этого заметим, что треугольник A2AA3 - равнобедренный (A3A=A2A=A1A), а угол при его вершине A равен 2∠BAC и потому не зависит от выбора точки A1.

Итак, при движении точки A1 по стороне BC углы треугольника A2AA3 не меняются. А его линейные размеры будут наименьшими, когда наименьшей будет сторона A2A, которая равна A1A. Значит, A1A - высота, опущенная на сторону BC.



Рисунок 14

Мы видим, что существует единственный вписанный треугольник наименьшего периметра, его вершина A1 - основание высоты. Если провести те же рассуждения c вершинами B1 и C1, получим, что они также являются основаниями высот (поскольку треугольник минимального периметра - единственный).

Теорема Фаньяно. Среди всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник, наименьший периметр имеет ортотреугольник (т. е. треугольник с вершинами в основаниях высот).

.3 Задача Дидоны

Столько купили земли и дали ей имя Бирса, Сколько смогли окружить бычьей шкурой.

Вергилий. Энеида

Прекраснейшим телом является шар, а прекраснейшей плоской фигурой - круг.

Пифагор

Дидона - древняя финикийская, дочь тирского царя, бежала из дома, спасаясь от преследований своего брата, отправилась на запад вдоль берегов Средиземного моря искать себе прибежище. Ей приглянулось одно место на побережье нынешнего Тунисского залива. Дидона повела переговоры с местным предводителем Ярбом о продаже земли. Запросила она совсем немного - столько, сколько можно «окружить бычьей шкурой». Дидоне удалось уговорить Ярба. Сделка состоялась, и тогда Дидона изрезала шкуру быка на мелкие тесемки, связала их воедино и окружила большую территорию, на которой основала крепость, а вблизи от нее - город Карфаген.

Этот эпизод дает повод задуматься над вопросом: сколько же земли можно окружить бычьей шкурой? Для того чтобы ответить на этот вопрос, нужно правильно математически поставить задачу: среди замкнутых плоских кривых, имеющих заданную длину, найти кривую, охватывающую максимальную площадь.

Основные пути решения задачи Дидоны или, как ее называют по - другому, классической изопериметрической задачей были намечены еще во времена античности. Строгое доказательное оформление этих идей было сделано математиками гораздо позже. Актершев приводит схему доказательства Я. Штейнера.

Теорема: Из всех изопериметрических замкнутых плоских кривых окружность является экстремальной.

Лемма 1: Экстремальная кривая выпукла.



Рисунок 15

Доказательство: Если кривая не выпукла, то на ней найдутся две точки А и А1 такие, что обе дуги АВА1 и АВ1А1, соединяющие точки А и А1, лежат по одну сторону от прямой АА1 (рис. 15). Заменив одну из дуг ее зеркальным отражением относительно прямой АА1, мы получим кривую той же длины, но большей площади.

Лемма 2: Если точки А и В делят длину экстремальной кривой пополам, то хорда АВ делит площадь фигуры пополам.

Доказательство: Если хорда АВ делит площадь на две неравные части, то большую часть можно зеркально отразить относительно прямой АВ и, взяв большую часть вместе с ее зеркальным отражением, получить новую фигуру с тем же периметром, но большей площади.

Лемма 3: Пусть точки А и В делят длину экстремальной кривой пополам, и точка С любая точка кривой. Тогда угол АВС - прямой.

Доказательство: Допустим, что угол АВС не является прямым. Площадь, ограниченная дугой АСВ и хордой АВ, разбита на три части: треугольник АСВ и два сегмента, прилегающие к хордам АС и СВ. Представим, что сегменты жесткие, а в точке С находится шарнир, соединяющий два сегмента. Повернем хорду СА вместе с прилегающим к ней сегментом вокруг шарнира так, чтобы угол между хордами стал прямым. Точка А перейдет в точку А1, при этом длина дуги АВС и площади сегментов не изменятся (рис. 10). Площадь треугольника ВСА1 больше, чем площадь треугольника ВСА, т. к. из всех треугольников с заданными длинами двух сторон максимальную площадь имеет прямоугольный треугольник. Теперь отразим полученную фигуру относительно А1В. В результате получаем фигуру с тем же периметром, но большей площадью.



Рисунок 16

.4 Задача Ферма - Торричелли - Штейнера

История этой задачи насчитывает более трёх с половиной столетий. Она была помещена в книге итальянского физика и механика Вивиани «О максимальных и минимальных значениях» в 1659 году. Винченто Вивиани (1622-1703) известен как один из лучших специалистов по задачам на максимум и минимум, а также по теории конических сечений. Своё сочинение Вивиани, следуя традициям того времени, снабдил длинным названием: «Пятая книга сочинений Аполлония Пергского о конических сечениях, заключает в себе первые исследования о наибольших и наименьших величинах и признаётся самым замечательным памятником этого великого геометра».

Среди множества задач на максимум и минимум, помещённых в этой книге, есть такая: на плоскости даны три точки A, B, C, не лежащие на одной

прямой. Для какой точки T плоскости сумма расстояний AT + BT + CT наименьшая?

Ещё до книги Вивиани этой задачей интересовался итальянский математик Бенавентура Кавальери (1598-1647), автор знаменитого «принципа Кавальери» для вычисления площадей и объёмов, предвосхитившего интегральное исчисление, а также математик и физик Эванджелиста Торричелли (1608-1647). Согласно другим источникам, независимо от Торричелли, эту задачу решил и величайший французский математик Пьер Ферма (1601-1665). А первое чисто геометрическое решение принадлежит, по - видимому, швейцарскому геометру Якобу Штейнеру (1796-1863).

Решение: выстроим отрезки AT, BT и CT в ломаную линию. Теперь, однако, вместо симметрии применим поворот. Повернём плоскость на 60вокруг точки A, при этом точка C перейдёт в некоторую точку D, а точка T - в точку N. Треугольник AND равен треугольнику ATC, поскольку переходит в него при повороте на 60, значит TC = ND. Треугольник ANT - равносторонний, так как AT = AN и ∠TAN=60◦, поэтому TA = TN. Итак, сумма AT + BT + CT равна длине ломаной BTND, а значит, она не меньше длины отрезка BD.



Рисунок 17

Повернём плоскость на 60вокруг точки A, при этом точка C перейдёт в некоторую точку D, а точка T - в точку N.



Рисунок 18

Треугольник AND равен треугольнику ATC, поскольку переходит в него при повороте на 60, значит TC = ND. Треугольник ANT - равносторонний, так как AT = AN и ∠TAN=60, поэтому TA = TN. Итак, сумма AT + BT + CT равна длине ломаной BTND, а значит, она не меньше длины отрезка BD. Равенство достигается, когда точки B, T, N и D лежат на одной прямой (в указанной последовательности). Это означает, что ∠BTA + ∠ATN = 180 и, следовательно, ∠BTA = 120; а также ∠AND + ∠ANT = 180, значит, ∠AND = 120, поэтому

∠ATC = 120. Таким образом, лучи TA, TB и TC образуют два угла в 120, поэтому и третий угол между ними также равен 120 (рис. 18).

Итак, сумма AT + BT + CT равна длине ломаной BTND, а значит, она не меньше длины отрезка BD (рис. 17). Равенство достигается, когда точки B, T, N и D лежат на одной прямой (в указанной последовательности). Это означает, что ∠BTA + ∠ATN = 180 и, следовательно, ∠BTA = 120; а также ∠AND + ∠ANT = 180, значит, ∠AND = 120, поэтому ∠ATC = 120. Таким образом, лучи TA, TB и TC образуют два угла в 120, поэтому и третий угол между ними также равен 120.

Точка T, из которой все стороны треугольника видны под углами 120, имеет несколько названий. Иногда её называют точкой Ферма, иногда - точкой Торричелли, иногда - точкой Штейнера. Доказательство, которое было приведено, с поворотом плоскости на 60, принадлежит Якобу Штейнеру.

А первым по времени из этих трёх математиков был Торричелли. Поэтому будем называть эту точку, по праву первенства, точкой Торричелли, центрами вписанной и описанной окружностей. Правда точка Торричелли существует не у любого треугольника. Однако уже доказано, что если у треугольника есть точка Торричелли, то она является единственной точкой минимума суммы расстояний до вершин треугольника.

Когда же точка Торричелли существует? Пусть из трёх углов треугольника угол при вершине A является наибольшим. Построим на сторонах AC и AB вовнутрь треугольника ABC дуги окружностей, содержащие по 120. Эти дуги пересекаются в точке A. Если же угол A меньше 120, то эти дуги имеют ещё и вторую точку пересечения, которую обозначим через T. Это и есть точка Торричелли. В самом деле, так как углы ATC и ATB по построению равны 120, то и третий угол BTC также получается равен 360 − 120•2 = 120. И наоборот, если точка Торричелли существует, то она строится именно таким образом, поскольку должна лежать на пересечении дуг окружностей величиной в 120, построенных на сторонах треугольника. Итак, треугольник имеет точку Торричелли тогда и только тогда, когда все его углы меньше 120.

Теорема Торричелли-Ферма-Штейнера. Если все углы треугольника меньше 120, то точкой минимума суммы расстояний до его вершин является точка Торричелли. Если же один из углов больше или равен 120, то такой точкой является вершина этого угла.

Заключение

Курсовая работа включает в себя две основные главы. В первой ее части мы постарались раскрыть значение столь необходимой в наше время науки в области математики, как экстремум, рассматривая ее первые шаги в этом направлении еще со времен Древней Греции. Что эта наука будоражила умы многих знаменитых людей того времени говорит о том, что до наших дней сохранились некоторые легенды (см. лист 5 курсовой работы).

С тех пор ученые в этой области шагнули далеко вперед и на сегодняшний день мы имеем мощнейший математический метод в виде современного математического анализа.

Экстремум постоянно возникает во многих расчетах в области инженерии, в экономических и финансовых сферах деятельности. Люди, далекие от математики, часто даже не подозревают о том, что в повседневной жизни им приходиться сталкиваться с таким понятием, как экстремум в его различии и многообразии. Аналитический и геометрический методы решения хороши тем, что не предполагает применения математического анализа и считается элементарным. В некоторых сферах деятельности человека такой метод будет более подходящим инструментом решения с научной точки зрения. задача максимум минимум геометрический

Вторая глава курсовой работы посвящена знаменитым задачам на максимум и минимум.

Задачи Кеплера, Фаньяно, Дидоны, Ферма по своей сути уникальны. Каждый из них внес неоценимый вклад в область математических исследований.

Деятельность Кеплера протекала между эпохами Коперника и Ньютона и символизирует начало современного естествознания. Фаньяно - известный итальянский инженер и математик, один из основателей эллиптического интеграла. Задача Дидоны - исторически первая задача вариационного исчисления. Некоторые источники связывают ее с древней легендой об основании города Карфагена. Ферма - французский математик, один из создателей аналитической геометрии, математического анализа, теории вероятностей и теории чисел.

Данной курсовой работой мы постарались максимально грамотно и четко раскрыть цели и задачи задач на максимум и минимум в геометрии. В процессе ее написания была изучена научная литература, источники энциклопедических словарей (в т.ч. Ф.А. Брокгауза и И.А. Ефрона), описаны история, понятия и методы решения задач известных математических деятелей Кеплера, Фаньяно, Дидоны и Ферма.

Список литературы

1. Актершев С. П. Задачи на максимум и минимум. - «БХВ Петербург» Санкт-Петербург, 2004.

. Нагибин Ф. Ф. Экстремумы. - «Просвещение». - Москва, 1996.

. Протасов В. Ю. Максимумы и минимумы в геометрии. - Издательство Московского центра непрерывного математического образования.- Москва, 2005.

. Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах. Издание второе. - Издательство МЦНМО Москва, 2006.

. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. - Издательство «Наука» Москва, 1970.

Приложение

. Биография Иоганна Кеплера.

Иоганн Кеплер (1571-1630) - немецкий астроном, один из творцов астрономии нового времени. Открыл законы движения планет, на основе которых составил планетные таблицы. Заложил основы теории затмений. Изобрел телескоп, в котором объектив и окуляр - двояковыпуклые линзы. Знак зодиака - Козерог.

Иоганн Кеплер появился на свет 27 декабря 1571 года в маленьком городке Вейле близ Штутгарта. Кеплер родился в бедной семье, и поэтому ему с большим трудом удалось окончить школу и поступить в 1589 году в Тюбингенский университет. Здесь он с увлечением занимался математикой и астрономией. Его учитель профессор Местлин втайне был последователем Коперника. Конечно, в университете Местлин преподавал астрономию по Птолемею, но дома он знакомил своего ученика с основами нового учения. И вскоре Кеплер стал горячим и убежденным сторонником теории Коперника.

В отличие от Местлина, Иоганн Кеплер не скрывал своих взглядов и убеждений. Открытая пропаганда учения Коперника очень скоро навлекла на него ненависть местных богословов. Еще до окончания университета, в 1594 году, Иоганна посылают преподавать математику в протестантское училище города Граца, столицы австрийской провинции Штирии.

Уже в 1596 году Иоганн издает «Космографическую тайну», где, принимая вывод Коперника о центральном положении Солнца в планетной системе, пытается найти связь между расстояниями планетных орбит и радиусами сфер, в которые в определенном порядке вписаны и вокруг которых описаны правильные многогранники. Несмотря на то, что этот труд Кеплера оставался еще образцом схоластического, квазинаучного мудрствования, он принес автору известность. Знаменитый датский астроном - наблюдатель Тихо Браге, скептически отнесшийся к самой схеме, отдал должное самостоятельности мышления молодого ученого, знанию им астрономии, искусству и настойчивости в вычислениях и выразил желание встретиться с ним. Состоявшаяся позже встреча имела исключительное значение для дальнейшего развития астрономии.

В 1600 году приехавший в Прагу Тихо Браге предложил Иоганну работу в качестве своего помощника для наблюдений неба и астрономических вычислений. Незадолго перед этим Браге был вынужден оставить свою родину Данию и выстроенную им там обсерваторию, где он в течение четверти века вел астрономические наблюдения. Эта обсерватория была снабжена лучшими измерительными инструментами, а сам Браге был искуснейшим наблюдателем.

Когда датский король лишил Браге средств на содержание обсерватории, он уехал в Прагу. Браге с большим интересом относился к учению Иоганна Кеплера, но сторонником его не был. Он выдвигал свое объяснение устройства мира; планеты он признавал спутниками Солнца, а Солнце, Луну и звезды считал телами, обращающимися вокруг Земли, за которой, таким образом, сохранялось положение центра всей Вселенной.

Браге работал вместе с Кеплером недолго: в 1601 году он умер. После его смерти Иоганн Кеплер начал изучать оставшиеся материалы с данными долголетних астрономических наблюдений. Работая над ними, в особенности над материалами о движении Марса, Кеплер сделал замечательное открытие: он вывел законы движения планет, ставшие основой теоретической астрономии.

Философы Древней Греции думали, что круг - это самая совершенная геометрическая форма. А если так, то и планеты должны совершать свои обращения только по правильным кругам (окружностям).

Кеплер пришел к мысли о неправильности установившегося с древности мнения о круговой форме планетных орбит. Путем вычислений он доказал, что планеты движутся не по кругам, а по эллипсам - замкнутым кривым, форма которых несколько отличается от круга. При решении данной задачи Кеплеру пришлось встретиться со случаем, который, вообще говоря, методами математики постоянных величин решен быть не мог. Дело сводилось к вычислению площади сектора эксцентрического круга. Если эту задачу перевести на современный математический язык, придем к эллиптическому интегралу. Дать решение задачи в квадратурах Иоганн Кеплер, естественно, не мог, но он не отступил перед возникшими трудностями и решил задачу путем суммирования бесконечно большого числа «актуализированных» бесконечно малых. Этот подход к решению важной и сложной практической задачи представлял собой в новое время первый шаг в предыстории математического анализа.

Первый закон Иоганна Кеплера предполагает: Солнце находится не в центре эллипса, а в особой точке, называемой фокусом. Из этого следует, что расстояние планеты от Солнца не всегда одинаковое. Кеплер нашел, что скорость, с которой движется планета вокруг Солнца, также не всегда одинакова: подходя ближе к Солнцу, планета движется быстрее, а отходя дальше от него - медленнее. Эта особенность в движении планет составляет второй закон Кеплера. При этом И. Кеплер разрабатывает принципиально новый математический аппарат, делая важный шаг в развитии математики переменных величин.

Оба закона Кеплера стали достоянием науки с 1609 года, когда была опубликована его знаменитая «Новая астрономия» - изложение основ новой небесной механики. Однако выход этого замечательного произведения не сразу привлек к себе должное внимание: даже великий Галилей, по-видимому, до конца дней своих так и не воспринял законов Кеплера.

Потребности астрономии стимулировали дальнейшее развитие вычислительных средств математики и их популяризации. В 1615 году Иоганн Кеплер выпустил сравнительно небольшую по объему, но весьма емкую по содержанию книгу - «Новая стереометрия винных бочек», в которой продолжил разработку своих интеграционных методов и применил их для нахождения объемов более чем 90 тел вращения, подчас довольно сложных. Там же им были рассмотрены и экстремальные задачи, что подводило уже к другому разделу математики бесконечно малых - дифференциальному исчислению.

Необходимость совершенствования средств астрономических вычислений, составление таблиц движений планет на основе системы Коперника привлекли Кеплера к вопросам теории и практики логарифмов. Воодушевленный работами Непера, Иоганн Кеплер самостоятельно построил теорию логарифмов на чисто арифметической базе и с ее помощью составил близкие к неперовым, но более точные логарифмические таблицы, впервые изданные в 1624 году и переиздававшиеся до 1700 года. Кеплер же первым применил логарифмические вычисления в астрономии. «Рудольфинские таблицы» планетных движений он смог завершить только благодаря новому средству вычислений.

Проявленный ученым интерес к кривым второго порядка и к проблемам астрономической оптики привел его к разработке общего принципа непрерывности - своеобразного эвристического приема, который позволяет находить свойства одного объекта по свойствам другого, если первый получается предельным переходом из второго. В книге «Дополнения к Вителлию, или Оптическая часть астрономии» (1604) Иоганн Кеплер, изучая конические сечения, интерпретирует параболу как гиперболу или эллипс с бесконечно удаленным фокусом - это первый в истории математики случай применения общего принципа непрерывности. Введением понятия бесконечно удаленной точки Кеплер предпринял важный шаг на пути к созданию еще одного раздела математики - проективной геометрии

Вся жизнь Кеплера была посвящена открытой борьбе за учение Коперника. В 1617-1621 годах в разгар Тридцатилетней войны, когда книга Коперника уже попала в ватиканский «Список запрещенных книг», а сам ученый переживал особенно трудный период в своей жизни, он издает тремя выпусками общим объемом примерно в 1000 страниц «Очерки коперниканской астрономии». Название книги неточно отражает ее содержание - Солнце там занимает место, указанное Коперником, а планеты, Луна и незадолго до того открытые Галилеем спутники Юпитера обращаются по открытым Кеплером законам. Это был фактически первый учебник новой астрономии, и издан он был в период особенно ожесточенной борьбы церкви с революционным учением, когда учитель Кеплера Местлин, коперниканец по убеждениям, выпустил учебник астрономии по Птолемею!

В эти же годы Кеплер издает и «Гармонию мира», где он формулирует третий закон планетных движений. Ученый установил строгую зависимость между временем обращения планет и их расстоянием от Солнца. Оказалось, что квадраты периодов обращения любых двух планет относятся между собой как кубы их средних расстояний от Солнца. Это - третий закон Иоганна Кеплера.

В течение многих лет И. Кеплер ведет работу по составлению новых планетных таблиц, напечатанных в 1627 году под названием «Рудольфинские таблицы», которые многие годы были настольной книгой астрономов. Кеплеру принадлежат также важные результаты в других науках, в частности в оптике разработанная им оптическая схема рефрактора уже к 1640 году стала основной в астрономических наблюдениях.

Работы Кеплера над созданием небесной механики сыграли важнейшую роль в утверждении и развитии учения Коперника Им была подготовлена почва и для последующих исследований, в частности для открытия Исааком Ньютоном закона всемирного тяготения. Законы Кеплера и сейчас сохраняют свое значение научившись учитывать взаимодействие небесных тел, ученые их используют не только для расчета движений естественных небесных тел, но, что особенно важно, и искусственных, таких как космические корабли, свидетелями появления и совершенствования которых является наше поколение.

Открытие законов обращения планет потребовало от ученого многих лет упорной и напряженной работы. Кеплеру, терпевшему гонения и со стороны католических правителей, которым он служил, и со стороны единоверцев-лютеран (лютеранство - крупнейшее направление протестантизма. Основано Мартином Лютером в 16 веке), не все догмы которых он мог принять, приходится много переезжать. Прага, Линц, Ульм, Саган - неполный список городов, в которых он трудился.

Иоганн Кеплер занимался не только исследованием обращения планет, он интересовался и другими вопросами астрономии. Его внимание особенно привлекали кометы. Подметив, что хвосты комет всегда обращены в сторону от Солнца, Кеплер высказал догадку, что хвосты образуются под действием солнечных лучей. В то время ничего еще не было известно о природе солнечного излучения и строении комет. Только во второй половине XIX века и в XX веке было установлено, что образование хвостов комет действительно связано с излучением Солнца.

Иоганн Кеплер умер ученый во время поездки в Регенсбург 15 ноября 1630 года, когда тщетно пытался получить хоть часть жалованья, которое за много лет задолжала ему императорская казна.