Зміст

Вступ

Розділ І. Числа Фібоначчі

.1 Історичні відомості чисел Фібоначчі

.2 Означення та основні властивості чисел Фібоначчі

.3 Золотий переріз (формула Біне)

Розділ ІІ. Застосування чисел Фібоначчі

.1 Математичні застосування чисел Фібоначчі

.1.1 Числа Фібоначчі і геометрія

.1.2 Метод математичної індукції і числа Фібоначчі

.2 Застосування чисел та золотої пропорції в різних галузях

Висновки

Список використаної літератури

Вступ

Актуальність дослідження. В курсовій роботі розглядаються числа послідовності Фібоначчі, а також феномен золотого перерізу, в якому більшість вчених бачать одне з найбільш яскравіших, давно помічених людиною проявів гармонії природи.

Послідовність та числа Фібоначчі дуже широко застосовуються в різних галузях як математичного, так і не математичного світу. Не дивно, що дослідження даного питання інтенсивно продовжувалося і в ХХ столітті. Цьому сприяли нові проблеми комбінаторики, інформатики, які в той час постали перед інтелектуальною елітою суспільства. Дана тема не втрачає своєї актуальності й до наших днів.

В математиці існує багато задач, часто важких і цікавих, які не пов'язані з будь-чиїм ім'ям, а скоріше носять характер свого роду «математичного фольклору». Ці завдання нерідко мають ходіння в декількох варіантах; іноді кілька таких завдань об'єднують в одну, більш складну; іноді, навпаки, одне завдання розпадається на декілька більш простих; словом, часто, виявляється, важко розрізнити, де закінчується одне завдання і починається інше. Найправильніше було б вважати, що в кожній з таких завдань ми маємо справу з маленькими математичними теоріями , що мають свою історію, свою проблематику і свої методи - все це, зрозуміло, тісно пов'язане з історією, проблематикою і методами «великої математики».

Такою теорією є і теорія чисел Фібоначчі. Породжених знаменитою «задачею про кроликів», що має більше семисот п'ятидесятирічну давність, числа Фібоначчі до цих пір залишаються однією з найбільш захоплюючих розділів математики.

Крім того, і це є фундаментальним фактом історії математики нашого часу, істотно змістився центр математичних досліджень в цілому. Зокрема, втратила свої домінуючі позиції теорія чисел і різко підвищилася питома вага екстремальних завдань. У самостійну галузь математики склалася теорія ігор. По суті виникла обчислювальна математика .

Нарешті було встановлено досить велика кількість раніше невідомих властивостей чисел Фібоначчі, а до самих чисел істотно зріс інтерес. Значне число пов'язаних з математикою людей в різних країнах долучилися до благородного хоббі «фібоначчізма ».

Теорія чисел Фібоначчі використовується в багатьох галузях, тому ці числа залишаються актуальною темою в математиці.

Об’єкт дослідження: число Фібоначчі та його вияви у різноманітних сферах людської діяльності.

Предмет дослідження: методологічні основи практичного використання чисел Фібоначчі та «золотої пропорції» у математиці.

Мета дослідження: виявити застосування чисел Фібоначчі

Відповідно до об’єкта, предмета і мети визначено головні завдання дослідження:

− опрацювати наукову літературу з теми даного дослідження;

− розкрити сутність поняття число Фібоначчі, «золотий переріз»;

− знайти практичне застосування чисел Фібоначчі.

Структура та обсяг курсової роботи. Робота складається із вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел. Загальний обсяг роботи становить 34 сторінки.

Розділ І. Числа Фібоначчі

.1 Історія чисел Фібоначчі

число фібоначчі золотий пропорція

Італійський купець Леонардо із Пізи (1180-1240), відомий як Фібоначчі, був, безумовно, найбільшим математиком доби Середньовіччя. Роль його книг у розвитку математики надзвичайно велика.

Роки життя Леонардо Пізанського припадають на часи, коли Європа прокидалася від середньовічної сплячки. Це була своєрідна репетиція історії перед бурхливим і яскравим спалахом Ренесансу. (Саме слово «Ренесанс» у перекладі з італійської якраз і означає «Відродження».) Відродження високих моральних і естетичних ідеалів античності значною мірою відбулося завдяки італійському купецтву. Саме через нього налагоджувались тісні ділові і культурні зв’язки з арабським (ісламським) світом, який переживав тоді період розквіту. Прямих зв’язків з Індією та Китаєм ще не було. Але знаменита подорож італійського купця Марко Поло (1254 - 1324) до Китаю, здійснена ним у 1271- 1295 роках, була не за горами. Все це стало передвістям знаменитого італійського гуманізму, який визначив обличчя усієї європейської цивілізації аж до наших днів.

Купцем був і батько Леонардо Пізанського. Його звали Боначчі (що, до речі, означає «добродушний»). Самого ж Леонардо називали Фібоначчі - від filius Bonacci, що дослівно означає «син Боначчі». Під цим прізвищем Леонардо Пізанський і став відомий як учений. Купець Боначчі у свої зарубіжні подорожі брав і сина. Він найняв для нього вчителів-арабів. Завдяки цьому Леонардо отримав прекрасну освіту. Це, зокрема, дозволило йому постійно перемагати на математичних турнірах, що якраз тоді увійшли в моду і на довгі роки стали неодмінним атрибутом культурного життя Італії.

Тогочасні математичні турніри - це прообраз сучасних математичних «боїв», які організовуються для учнів спеціалізованих фізико-математичних шкіл - щось середнє між математичною олімпіадою та КВК. Правда, учасниками турніру були не команди, а лише два суперники, які по черзі пропонували один одному розв’язати математичні задачі.

Саме на цих турнірах і проявилися талант і знання Леонардо, за що він здобув покровительство самого короля. Це сприяло розвитку торгової справи Леонардо, оскільки полегшувало організацію поїздок до Єгипту, Північної Африки, Сирії і Візантії. З іншого боку - забезпечувало йому умови для подальшого зростання як ученого. В чужих країнах Леонардо здобував нові математичні знання. Нарешті, за покровительства Фрідріха ІІ було організовано випуск наукових трактатів Леонардо. І першим серед них стала «Книга абака».

Не дивлячись на свою назву, ця книга присвячена, власне, не абаку, а вміщує відомості практично з усієї тогочасної математики - аж до методів розв’язування різноманітних рівнянь. Слово «абак» тоді часто вживалося як синонім до слова «арифметика». І при розгляді усіх цих питань, з першої сторінки і до останньої, Леонардо систематично використовує нову індійську систему нумерації. Кращого способу пропаганди цієї системи годі було і придумати. Ефективність нового способу числення показана на багатьох прикладах розв’язування математичних задач найрізноманітнішого змісту. Відтоді індійсько-арабські числа по-справжньому стають європейськими. А «Книга абака» - основною вихідною точкою для розвитку європейської математики. По ній і по її компіляціях вивчали математику аж до часів Декарта (ХVII ст.) та Ейлера (XVIII ст.).

Одна із задач з «Книги абака» (рис.1) Леонардо Пізанського здобула особливу популярність у зв’язку з тим, що послідовність чисел, яка з’являється в результаті її розв’язування, має багато цікавих властивостей, а що найголовніше - неймовірним чином проявляється у найрізноманітніших областях як математики, так й інших наук. Зокрема, саме за цією книгою Європа ознайомилася з індуськими (арабськими) цифрами.

На сторінках даного рукопису Фібоначчі наводить задачу. Ось ця задача: «Хтось помітив пару кроликів у певному місці, огородженому з усіх сторін стіною, щоб дізнатися, скільки пар кроликів народиться при цьому протягом року, якщо природа кроликів така, що через місяць пара кроликів народжує не світ другу пару, а народжують кролики на другий місяць після свого народження».

 <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Liber\_abbaci\_magliab\_f124r.jpg?uselang=ru>

Рис. 1. Сторінка «Книги абака <http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BD%D0%B8%D0%B3%D0%B0\_%D0%B0%D0%B1%D0%B0%D0%BA%D0%B0>» Фібоначчі

Нехай перша пара кроликів є новонародженою. Тоді на 2-ий місяць ми все ще матимемо тільки 1 пару. На 3-ій місяць ця пара дасть перше потомство і, отже, вже буде 2 пари. На четвертий місяць матимемо 2 + 1 = 3 пари (з двох наявних пар потомство дасть лише перша). На п’ятий місяць буде 3 + 2 = 5 пар, на шостий 5 + 3 = 8 (бо потомство дають тільки ті пари, які народилися не пізніше четвертого місяця). і т. д

Ця задача породила найвідомішу з усіх у світі числових послідовностей, яка тоді ще не знала, яку рол відведе їй в історії людства доля. Числа Fn ,що утворюють послідовність 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,... називаються “числами Фібоначчі”, а сама послідовність -послідовністю Фібоначчі. Суть послідовності Фібоначчі в тому, що, починаючи з 1,1, наступне число одержимо складанням двох попередніх чисел.

Людина розподіляє навколишні предмети за формою. Форма, в основі побудови якої знаходяться комбінації симетрії та золотого перерізу, сприяє найкращому зоровому сприйняттю та виникненню відчуття краси та гармонії. Ціле складається з частини різної величини знаходяться у визначеному співвідношенні один до одної та до цілого. Принцип золотого перерізу - найвищий вияв структурної та функціональної досконалості цілого та його частин у мистецтві, науці, техніці та природі. Золотий переріз -це таке пропорційне ділення відрізку на частини, при якому весь відрізок так відноситься до більшої частини, як найбільша частина відноситься до меншої; тобто менший відрізок так відноситься до більшого, як більший до всього

a : b = b : c або с : b = b : а .

З історії астрономії відомо, що І.Тіціус, німецький астроном XVIII ст., за допомогою послідовності Фібоначчі знайшов закономірність та порядок у відстанях нашої сонячної системи.

У 1997 році декілька особливостей ряду описав російський вчений. Він був переконаний, що Природа (так само і Людина) розвивається за законами, які закладен в цій числовій послідовності. Розвиток цивілізації можна визначити за допомогою різних методів у нумерології. Наприклад, за допомогою приведення складних чисел до однозначних. Проводячи подібну процедуру із всіма складними числами ряду Фібоначчі, було отримано такий ряд цих чисел: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 4, 3, 7, 1, 8, 9, 8, 8, 7, 6, 4, 1, 5, 6, 8, 1, 9. Потім все повторюється 1, 1, 2, 3, 5, 8, 4, 3, 7, 1, 8, 4, 8, 8,.. і повторюється знову та знову. Цей ряд також має властивості ряду Фібоначчі; кожний нескінчено наступний член дорівнює сумі попередніх. Виявляється, що цей ряд періодичний, з періодом 24 члени, після чого весь порядок цифр повторюється. Одержавши цей період, він запропонував цікаве припущення - чи не є набір із 24 цифр своєрідним цифровим кодом розвитку цивілізації?

Ральф Нельсон Элліотт (американський фінансист) винайшов сміливе рішення. Якщо практично все в нашому світі базується на коефіцієнтах Фібоначчі, то чому б не використати їх в аналізі посування цін на біржах. Вводячи свій підхід, Элліотт навів думку: “Будь-якій людській діяльності притаманні тpивідмінні особливості: фоpма, час та відношення, -і всі вони підпорядковуються послідовності Фібоначчі”.

Послідовність Фібоначчі залишається математичною кабалою до сьогодні, і кожне нове відкриття проливає новий відблиск на магію цих цифр[21, с.33].

.2 Означення та основні властивості чисел Фібоначчі

Розглянемо наступну числову послідовність:

, ,...,, (1),

в якій кожний член рівний сумі двох попередніх членів, тобто при будь-якому n>2.

 =  + . (2)

Такі послідовності, в яких кожен член визначається, як деяка функція попередніх, часто зустрічаються в математиці і називаються рекурентними.

Звернемось тепер до важливого окремого випадку послідовності (1), коли

 = 1 і  = 1.

Умова (2), як було тільки що зазначено, дає нам можливість вираховувати послідовно один за другим всі члени цього ряду. Неважко перевірити, що в цьому випадку першими чотирнадцятьма його членами будуть числа 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, які нам вже зустрічались в задачі про кроликів.

В честь автора цієї задачі вся послідовність (1) при  =  = 1. називається рядом Фібоначчі, а її члени - числами Фібоначчі.

Розглянемо деякі основні властивості чисел Фібоначчі. Наприклад, квадрат будь-якого члена послідовності дорівнює добутку попереднього і наступного члена, і плюс або мінус один (згідно з хвильової теорії Еліота, якаще називається правилом чергування). Також цікавий факт в тому, що послідовність є частковим випадком зворотної послідовності її характеристичного многочленна тобто

-х-1= 0 =Ф, = -1/Ф.

Числова послідовність Фібоначчі має багато цікавих властивостей.

Наприклад, сума двох сусідніх чисел послідовності дає значення наступного після них, що підтверджує існування, так званих, коефіцієнтів Фібоначчі. Існує основний набір фібоначівських коефіцієнтів. Візьмемо для приклада два числа 1.618 і 0.618. Перше представляє собою відношення кожного числа до попереднього. Число 0.618 знаходиться із співвідношення кожного числа до наступного. Також це число представляє собою постійний коефіцієнт золотої середини і золотої спіралі. Всі ці коефіцієнти спостерігаються як в природі так і в пропорційних відношеннях тіла людини.

Будь-яка пара сусідніх чисел ряду Фібоначчі un та un+1 задовольняє одне із рівнянь

 - ху -  = +1

При цьому, якщо у = un, то х = un+1.

Сума n перших членів ряду Фібоначчі на 1 менша від (n + 2)-го члена того самого ряду:

 +  +…+  = .

Сума квадратів чисел послідовності Фібоначчі визначається через добуток двох сусідніх членів того самого ряду:

+  +…+ = .

Квадрат кожного члена ряду Фібоначчі, зменшений на добуток попереднього і наступного членів, дає поперемінно то +1, то -1:

 - =  = .

++…+  = .

++…+  = .

 +  = .

Властивість чисел Фібоначчі - Нарайани

Здавалося б, що теорію чисел Фібоначчі можна вважати завершеною, якби видатний індійський математик XIV ст. Нарайана не сформулював своєї задачі про корів і теличок, яка викрила нові пристрасті математиків.

Задача Нарайана. Корова щороку приносить теличку. Кожна теличка, починаючи з четвертого току свого життя, на початку року також приносить по теличці. Скільки буде всього голів корів і телят через 20 років

Міркуючи аналогічно, як в числах Фібоначчі, приходимо до числової послідовності

2, 3, 4, 6, 9, …, =+.

Обчислюючи її члени послідовно, отримаємо, що U20 = 2745. Введемо таке означення.

Означення. Послідовністю Фібоначчі - Нарайани називатимемо послідовність

=+ (1),

а члени цієї послідовності - числами Фібоначчі - Нарайани.

Покладемо  = 0.

Маємо числову послідовність 0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, ….

Якщо в послідовності (1) n = 7k + 4, n = 7k + 6, n = 7k, де k = 0, 1, 2, …, то  - парне.

На три діляться тільки ті члени ряду (1), порядковій номер яких має вид 8n, 8n - 1 або 8n - 3.

1.3 Золотий переріз ( формула Біне)

Золотий переріз - це найкомфортніша для ока пропорція, форма, в основі побудови якої лежить поєднання симетрії і золотого перетину, сприяє якнайкращому зоровому сприйняттю і появі відчуття краси і гармонії.

У математиці принцип золотого перерізу вперше сформульовано ще в «Началах» Евкліда, найвідомішому математичному творі античної науки, написаному в III столітті до н.е.

Послідовність Фібоначчі - це не просто гра з числами, а найбільш важливе математичне вираження природних явищ з усіх, що колись було відкрито. Гідно подиву, скільки всього можна обчислити за допомогою послідовності Фібоначчі і як її члени проявляються у величезній кількості комбінацій. Приклади, що наведені нижче, подають деякі цікаві застосування цієї математичної послідовності. Дана послідовність асимптотично (наближаючись усе повільніше та повільніше) прямує до деякого постійного співвідношення (відношення члена послідовності до попереднього йому). Однак це одержимо число 0.382. При діленні будь-якого члена послідовності Фібоначчі нанаступний одержимо зворотну до 1.618 величину (1: 1.618=0.618). При діленні кожного числа на наступне за ним через одне, одержимо число 0.382[15, с.22]. Особові назви цьому співвідношенню почали надавати ще до того, коли Лука Пачіолі (сpедньовічний математик) назвав його “Божественною пpопоpцією”. Найого думку, навіть Бог використовував принцип золотого перерізу для створення Всесвіту. Доречі, цю ідею пізніше використав Кеплер (німецький математик, астроном, механік)[10,с.37]. Водночас Леонардо да Вінчі, другом котрого був Пачолі, використовував для композиційної побудови своєї знаменитої Джокондит.зв. «золотий рівнобедрений трикутник», уякому відношення бедра до основи дорівнює золотому перерізу.еред його сучасних назв є такі, як “Золотий переріз” та “відношення обернених квадpатів”. Kеплеp назвав це співвідношення одним із “скарбів геометpії”. В алгебpі загальноприйняте його позначення грецькою літерою фі: Ф=1.618. Тут необхідно відзначити, що Фібоначчі лише нагадав людству це співвідношення, так як воно було відомо ще в давні часи під назвою “Золотий переріз”. Людина розподіляє навколишні предмети за формою. Форма, в основі побудови якої знаходяться комбінації симетрії та золотого перерізу, сприяє найкращому зоровому сприйняттю та виникненню відчуття краси та гармонії. Ціле завжди складається з частин, частини різної величини знаходяться у визначеному співвідношенні один до одної та до цілого.Принцип золотого перерізу - найвищий вияв структурної та функціональної досконалості цілого та його частин у мистецтві, науці, техніці та природі.

Відрізки золотої пропорції виражаються нескінченним ірраціональним дробом 0,618..., якщо cприйняти за одиницю, a = 0,382.. Як ми вже знаємо, числа 0.618 і 0.382 є коефіцієнтами послідовності Фібоначчі. На цій пропорції базуються основні геометричні фігури.



Це рівняння має єдиний додатній розв'язок

 <http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Image-Golden\_ratio\_line.png>

φ=(a+b):a=a:b

Рис.2



Відношення двох відрізків приблизно дорівнює 13:8.

Число(рис.2) деколи називають золотим числом.

Обчислення значення золотого перетину.

Золотий перетин  можна обчислити безпосередньо з означення:



Праве рівняння дає a=b. Підставляючи цю рівність у ліву частину:



Скоротивши  отримаємо:



Помноживши обидві частини на після перестановки отримаємо:



Це квадратне рівняння <http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B2%D0%B0%D0%B4%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BD%D0%B5\_%D1%80%D1%96%D0%B2%D0%BD%D1%8F%D0%BD%D0%BD%D1%8F>має два розв'язки, один з яких є додатнім



Формула Біне

Числа Фібоначчі тісно пов'язані з золотим перетином <http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D1%82%D0%B8%D0%B9\_%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B5%D1%82%D0%B8%D0%BD>



Формула Біне виражає за допомогоюзначення в явному вигляді як функцію від n:



При цьомуіє коренями квадратного рівняння .

Оскількизнаходимо, що приТому з формули Біне випливає, що для всіх натуральних n,  є найближчим доцілим числом, тому

або. Зокрема,

справедливаасимптотика <http://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%90%D1%81%D0%B8%D0%BC%D0%BF%D1%82%D0%BE%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0&action=edit&redlink=1>



Розділ ІІ. Застосування чисел Фібоначчі

.1 Математичні застосування

Принципи «золотого перетину» використовуються в математиці, фізиці, біології, астрономії й інших науках, в архітектурі та інших мистецтвах. Вони лежать в основі архітектурних пропорцій багатьох чудових творів, головним чином античності та Відродження.

У кожній науці є, так звані, «Метафізичні» знання, без яких неможливе існування самої науки. Наприклад, якщо виключити з математики поняття натурального та ірраціонального чисел або аксіоми геометрії, математика відразу ж перестане існувати. З таким же правом до розряду «метафізичних» знань може бути віднесено й «золотий перетин», яке вважалося «каноном» античної культури, а потім і епохи Відродження. Однак, як це не парадоксально, в сучасній теоретичній фізиці і математиці «золота пропорція» ніяк не відображена. Нині робляться спроби показати, що «золотий перетин» є однією з найважливіших «метафізичних» ідей, без якої важко уявити подальший розвиток науки, зокрема, теоретичної фізики і математики [16,с.105].

«Золотий переріз» та математика - невід’ємні поняття, які не можуть існувати окремо. Широке поширення отримали так звані «Золоті фігури», мають у своїй основі «золотий перетин».

«Золотий трикутник» - це рівнобедрений трикутник, у якого відношення довжини бічної сторони до довжини основи дорівнює 1.618.

Є й «золотий кубоід» - це прямокутний паралелепіпед з ребрами, що мають довжини 1.618, 1 і 0.618.

В даний час досліджуються математичні теорії пов'язані з принципами «золотого перетину»: нова теорія гіперболічних функцій, нова теорія чисел, нова теорія вимірювання, теорія матриць Фібоначчі і так званих «золотих» матриць, нові комп'ютерні арифметики, нова теорію кодування і нова теорія криптографії. Суть нової науки, у перегляді з точки зору золотого перерізу всієї математики, починаючи з Піфагора, що, природно, спричинить у теорії нові й напевно дуже цікавій.

Задачі, розгляд яких приводить до послідовності чисел, які тісно пов’язані з числами Фібоначчі.

Задачі з теорії чисел.

Знайти число, яке ділиться на 7 і дає в залишку одиницю при діленні на 2, 3, 4, 5 і 6;

Знайти число, добуток якого на сім дає залишки 1, 2, 3, 4, 5 при діленні на 2, 3, 4, 5, 6, відповідно;

Знайти квадратне число, яке при збільшенні або зменшенні на 5 давало б квадратне число.

Задача про ріст дерев.

Це переформульована задача про розмноження кроликів, у якій умови є менш штучними. Вона формулюється так:

Нехай деяке дерево росте таким чином, що кожна нова гілка протягом першого року тягнеться догори або в бік, а потім (починаючи з другого року) щорічно дає по одному бічному пагону. Скільки гілок буде на дереві, яке виросте із саджанця без жодного бічного паростка через 1, 2, 3, 4 і т. д. років?

Задача про розміщення листків на гілці.

Якщо листки на гільці сидять поодинці, то вони завжди ростуть навколо стебла не по колу, а по гвинтовій лінії. При цьому для кожного виду рослин характерний свій кут розходження двох сусідніх листків, який, як стверджують ботаніки, буває більш-менш сталий в усіх частинах стебла. Цей кут звичайно подають дробом, що показує, яку частину кола він становить. Так, у липи і у в’яза кут розходження листків дорівнює , у бука - . Скласти послідовність найбільш поширених кутів розходженння (в частинах кола) для рослин, які ростуть у вашій місцевості. Що складають ряд чисельників і ряд знаменників для такої послідовності? Зауважимо, шо такий самий кут у даного виду рослин зберігається і в розміщенні гілок, бруньок, квіток.

Про фарбування будинків у містечку.

Будинки в містечку потрібно пофарбувати так, щоб кожен поверх виявився пофарбованим або в білий, або в блакитний колір. З естетичних міркувань, ніякі два сусідні поверхи не повинні бути пофарбованими в блакитний колір. Скількома способами можна пофарбувати будинки в містечку, дотримуючись вказаних вимог, якщо число їх поверхів визначено? (рис.3)

Усі можливі способи фарбування одно-, дво- та три поверхових будинків подано на малюнку 3. Зрозуміло, що одноповерхові будинки можна пофарбувати лише двома способами, двоповерхові - трьома, триповерхові - п’ятьма способами. Це означає, що із збільшенням кількості поверхів, число способів зростає так: 2, 3, 5...Якщо в містечку є будинки з більшою кількістю поверхів, цей ряд треба продовжити. Далі знаючи скільки в містечку одно-, дво-, три- і т.д. поверхових будинків, неважко отримати розв’язок цієї задачі.



Рис.3

2.1.1 Числа Фібоначчі і геометрія

Золота пропорція в геометричних об’єктах

Якщо у пентагоні провести діагоналі, одержимо п’ятикутну зірку, яка називається пентаграмою або пентаколом. (рис.4).



Рис.4

В пентагоні можна знайти велику кількість відношень золотої пропорції.

Наприклад, відношення діагоналі до його сторони. Кожні вісім років планета Венера описує довершено правильний пентакол по великій небесній сфері. Стародавні люди помітили це явище і були так вражені, що Венера та її пентакл стали символами довершеності та красоти.



Рис.5

Відомо, що зірка ледве не стала символом Олімпійських ігор, але в останній момент її модифікували: п’ять гострих кінців зірочки замінили п’ятьма кільцями (рис.5). За переконаннями організаторів кільця краще відображають гармонію ігор. Слово «Пентагон» нам добре відомо у зв’язку з назвою військового відомства США, будівля якого має форму пентагона.

В античному мистецтві широко відомий закон золотої чаші, який використовували скульптори. Заштрихована частина пентагона дає схематичне уявлення золотої чаші.



Рис.6

Геометрія додекаедра та ікосаедра пов’язана із золотою пропорцією. Гранями додекаедра є пентагони, тобто правильні п’ятикутники, які утворені на основі золотої пропорції. Якщо уважно подивитися на ікосаедр, то можна побачити, що в кожній вершині ікосаедра збігаються п’ять трикутників, зовнішні сторони яких утворюють пентагон (рис.7). Цих фактів достатньо, щоб переконатися в тому, що золота пропорція грає суттєву роль в конструкції цих двох платонових тіл.



Рис.7

Золотий перетин виступає у правильній пентаграмі <http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%B0%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%B0>, який вважався магічним символом у багатьох культурах. Точка перетину сторін ділить їх у золотій пропорції. Більша частина сторони також ділиться у золотій пропорції іншою точкою перетину.

Пентаграма містить п'ять гострокутних та п'ять тупокутних золотих трикутників <http://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%97%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D1%82%D0%B8%D0%B9\_%D1%82%D1%80%D0%B8%D0%BA%D1%83%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA&action=edit&redlink=1> (рис.8). У кожному з них співвідношення довжини довшої та коротшої сторони утворює золотий перетин.

 <http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Pentagram-phi.svg>

Рис.8

Червоний:Зелений =Зелений:Синій=Синій:Фіолетовий=

Звернемо увагу на пентаграму. Вона викликає зацікавлення багатьох людей. Пентаграма викликала особливе захоплення у піфагорійців і вважалася їх головним розпізнавальним знаком. Будівля військового відомства США має форму пентаграми і отримало назву «Пентагон», що значить правильний п'ятикутник.

Окрім пентагона і пентаграми золоті відношення є і в правильних многогранниках. Правильний многогранник - це такий многогранник, всі грані якого рівні ті є правильними многокутниками. Ще в «Началах» Евкліда доведено, що існує п’ять видів правильних многогранників: тетраедр, гексаедр, додекаедр, ікосаедр.

Інтерес людини до природи призвів до відкриття її фізичних і математичних закономірностей. Краса природних форм народжується у взаємодії двох фізичних сил - тяжіння та інерції. Золота пропорція - це математичний символ цієї взаємодії, оскільки виражає основні моменти живого зростання: стрімкий зліт юних пагонів змінюється уповільненимз ростанням «за інерцією» до моменту цвітіння.

Аналіз сучасних програм освіти в таких країнах, як США, Канада, Росія та Україна, показує, що в більшості з них немає навіть згадки про «золотий перетин». Тобто, має місце свідоме ігнорування одного з найважливіших відкриттів античної математики. Можливо, причину слід шукати в негативному ставленні сучасної «матеріалістичної» науки і «матеріалістичного» освіти до астрології і так званим «езотеричним» наук. У них «золотий перетин» і пов'язані з ним геометричні фігури - «пентаграма», «Платонова тіла», «куб Метатрон» - широко використовуються як основні «сакральних» символів. І «матеріалістичний» освіта не знайшло нічого більш розумного, як викинути золотий перетин на звалище «сумнівних наукових концепцій» разом з астрологією та «езотеричними» науками. У результаті більшість «освічених» людей добре знають «теорему Піфагора», але мають дуже туманне уявлення про «золотий перетин»

2.1.2 Метод математичної індукції і числа Фібоначчі, f2,f3,…,fn,… - числа Фібоначчі.

Довести, що кожне натуральне число дорівнює сумі кількох (можливо одного) різних чисел Фібоначчі.

Для n=1 твердження вірне, оскільки 1 є числом Фібоначчі.

. Доведемо, що воно виконується і для числа n. Якщо n - число з послідовності Фібоначчі, то твердження справедливе.

Якщо n не є числом Фібоначчі, то позначимо найбільше з чисел Фібоначчі, яке не перевищує n, через fі. Розглянемо різницю n- fі. Оскільки fі<n<fі+1= fі-1+ fі, 1<n- fі<fі-1, то за припущенням індукції n- fі можна записати у вигляді суми членів послідовності Фібоначчі, менших fі-1. Тобто n-fi=fi1+fi2+…+fik+fi. Отже, і в цьому випадку n можна записати як суму декількох різних чисел Фібоначчі.+m=fn-1fm+fnfm+1

Індукція по m.

Якщо m=1 формула приймає вигляд fn+1=fn-1f1+fnf2=2 формула приймає вигляд fn+2=fn-1f2+fnf3= fn-1+2fn =fn-1+fn+fn.

Припустимо, що виконується рівність fn+m=fn-1fm+fnfm+1 при m=k при m=k+1. Доведемо, що вона виконується і при m=k+2.+2=fn+1+fn=fn-1+fn+fn=fn-1+2fn=fn-1f2+fnf3.

Додаючи останні дві рівності, отримаємо:+k+2=fn-1fk+2+fnfk+3.

Якщо n ділиться на m, то і fn ділиться на fm.

Нехай n ділиться на m, тобто n = mk. Доведення будемо вести індукцією по k. Для k=1, n = m, видно, що fn ділиться на fm.

Припустимо, що fmk ділиться на fm. Розглянемо fm(k+1).(k+1)=fmk+m. Відомо, що fn+m=fn-1fm+fnfm+1.

Тоді, fm(k+1)=fmk-1fm+fmkfm+1. Перший доданок правої частини ділиться на fm. Другий - кратний fmk., тобто за припущенням також ділиться на fm. Це означає, що на fm ділиться і їх сума fm(k+1)

.2 Застосування чисел та золотої пропорції в різних галузях

Числа Фібоначчі у теорії інформації.

На основі Фібоначчієвої системи числення будується код ( кодування) Фібоначчі універсальний код для натуральних чисел (1, 2, 3...), що використовує послідовності бітів. Оскільки комбінація 11 заборонена в Фібоначчієвій системі числення, її можна використовувати як маркер кінця запису. Для складання коду Фібоначчі по запису числа в Фібоначчієвій системі числення слід переписати цифри в зворотному порядку (так, що старша одиниця виявляється останнім символом) і приписати в кінці ще раз 1. Тобто, кодова послідовність має вигляд:   … , де n - номер самого старшого розряду з одиницею.

Числа Фібоначчі в хімії

В цьому пункті дізнаємось про властивості деяких хімічних сполук, виявлених українським хіміком Миколою Васютинським[4,с.25-30]. Одним з фундаментальних хімічних законів є закон сталості складу хімічних сполук. Цей закон утвердився в хімічній науці після досліджень французького вченого Ж. Пруста (1754-1826). Досліджуючи хімічні сполуки, зокрема , оксиди металів, він прийшов до висновку, що хімічні сполуки мають строго постійний склад, що не залежний від умов їх утворення. Працями англійського вченого Д. Дальтона (1766-1844) в хімії утвердилось атомарне вчення. Був сформульований закон кратних відношень, за яким між атомами в сполуках встановлюються прості цілочисельні відносини. І зараз кожен школяр знає, що склад води описується формулою O, кухонної солі - NaCl, окису цинку - ZnO.

Поки вивчали порівняно прості хімічні сполуки, ставлення атомів в них зазвичай відповідало невеликим числам, наприклад, в O, , Але коло досліджуваних хімічних сполук розширюється. З’явилися формули сполук зі стехіометричними коефіцієнтами 7, 9, 15, 21 і т.д. А коли почали вивчати склад органічних сполук, про прості цілочисельних відносинах і говорити стало незручно. Своєрідним чемпіоном у стехіометрії стала ДНК бактеріофага, що задається формулою Тут вже мають місце чотиризначні величини, а не відношення «невеликих» цілих чисел.

Не будемо заглиблюватися в хімію різних утворень. Вияснимо чи виявляються в формулах сполук числа Фібоначчі, і чи підкоряється хімічна організація золотій пропорції.

Відповідь на це питання і спробував дати Васютинський. Йому вдалося виявити сполучення, засновані на числах Фібоначчі, при вивченні окислів урану і хрому. При окисленні урану склад утворюються окислів змінюється не безперервно, а стрибкоподібно від одного стійкого з'єднання з цілочисельними співвідношеннями атомів до іншого. Між оксидами урану  і  утворюється цілий ряд проміжних сполук, склад яких описується формулами  В них відношення атомів дорівнюють відношенню чисел Фібоначчі, розташованим через одне.

Кожен з описаних окислів урану може бути представлений у вигляді суми двох граничних окислів ряду  і UO, взятих в різних пропорціях , наприклад:  Тут коефіцієнти перед оксидами  і  відповідають поруч розташованим числах Фібоначчі. Ось і виходить , що склад розглянутих окислів урану повністю підпорядковується числам Фібоначчі, розташованим не випадково, а строго закономірно. Аналогічний склад мають і оксиди хрому.

Розглядаючи рівняння типу  приходить на розум алгебраїчне рівняння золотої пропорції 4 -го степеня  = 3x + 2 , що описує енергетичний стан бутадієну, яке має подібну структуру. А порівнюючи рівняння  з алгебраїчним рівнянням золотої пропорції 5 -го степеня =5x+3, вони також мають однакову структуру.

Загальноприйнято склад хімічних сполук визначати співвідношенням атомів елементів, що входять в ці сполуки. Але можна розглядати хімічні сполуки, що складається з атомів (іонів) різних елементів і рухливих валентних електронів , які «відповідають» за утворення хімічних зв'язків між атомами. Так, наприклад, в оксиді  на 7 атомів хрому і кисню припадає 10 валентних електронів. Якщо призвести аналогічні розрахунки для всіх оксидів ряду Фібоначчі, отримаємо наступні відносини сум атомів до сум валентних електронів:  ;; ; Чисельники цих дробів пов'язані відношенням Фібоначчі, а знаменники являють собою числа Люка. Якщо тепер послідовно зменшимо чисельники і знаменники цих дробів на числа Фібоначчі, що відповідають кількості атомів металів у сполуках: 2, 3, 5, 8, 13, то в результаті отримаємо ряд відношень сусідніх чисел Фібоначчі ;; ; ; , ці відношення прагнуть до золотої пропорції.

Таким чином, Васютинський досить переконливо показав, що хімічні сполуки, організовані «по Фібоначчі», існують.Але, існує нескінченна кількість узагальнених чисел Фібоначчі, р-чисел Фібоначчі, які безпосередньо випливають із трикутника Паскаля . Наведемо ці числові послідовності для початкових значень

р = 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 .1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14( n ) 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 610( n ) 1 2 3 4 6 9 13 19 28 41 60 78119179( n ) 1 2 3 4 5 7 10 14 19 26 36 50 69 95( n ) 1 2 3 4 5 6 8 11 15 20 26 34 45 60( n ) 1 2 3 4 5 6 7 9 12 16 21 27 34 43( n ) 1 2 3 4 5 6 7 8 10 13 17 22 28 35

Зрозуміло, що узагальнені числа Фібоначчі дають значно більшу кількість коефіцієнтів для хімічних сполук, ніж класичні числа Фібоначчі і відкривають більш широке поле хімічних досліджень.

«Золоту спіраль» також можна помітити в творах природи. Відстані між листям (або гілками) на стовбурі рослини відносяться приблизно як числа Фібоначчі.Осередки ананаса, створюють точно таку ж спіралеподібну послідовність, тобто 34 спіралі в один бік і 55 в інший.



Рис.9

Ракушки, будиночок равлика, морські зірки, тюльпани, лусочки на ялиновій шишці та особливо ракушки молюсків сформовані за тією ж схемою, з кожним приростом ракушка добавляє собі, ще один сегмент у відповідності з масштабом Фібоначчі.

Розташування насіння у кошику соняшнику. Вони шикуються уздовж спіралей, які закручуються як зліва направо, так і справа наліво. Насіння соняшника розташовані спіралями відповідно до послідовності Фібоначчі. Суцвіття соняшника з 34 спіралями в один бік і 55 в інший.

В один бік у середнього соняшнику закручено 13 спіралей, в іншу - 21. Відношення 13: 21 ставлення Фібоначчі.У більших суцвіть соняшнику кількість відповідних спіралей більше, але відношення числа спіралей, закручуються в різних напрямках також дорівнює числу .

Схоже спіральне розташування спостерігається у лусочок соснових шишок або осередків ананаса. За золотої спіралі згорнуті раковини багатьох молюсків, деякі павуки, сплітаючи павутину, закручують нитки навколо центру з золотим спіралях. Рогу архарів закручуються по золотих спіралях.

Одним з перших проявів золотого перерізу в природі помітив різнобічний спостерігач, автор багатьох сміливих гіпотез німецький математик і астроном Іоганн Кеплер (1571 - 1630). З XVII ст. спостереження математичних закономірностей у ботаніки та зоології стали швидко накопичуватися [22,с.52].

У 1850 р. німецький учений А. Цейзінг відкрив так званий закон кутів, згідно з яким середня величина кутового відхилення гілки рослини дорівнює приблизно 138 . Величина середнього кутового відхилення гілки відповідає меншій з двох частин, на які ділиться повний кут при золотому перерізі.   
Наведені нижче приклади показують деякі цікаві додатки цієї математичної послідовності [20,с.45-49]

. Раковина закручена по спіралі. Якщо її розгорнути, то виходить довжина, трохи поступається довжині змії. Невелика десятисантиметровий раковина має спіраль довжиною 35 см. Форма спірально завитий раковини привернула увагу Архімеда. Справа втому, що ставлення вимірювань завитків раковини постійно й дорівнює 1.618. Архімед вивчав спіраль раковин і вивів рівняння спіралі. Спіраль, накреслений по цьому рівнянню, називається його іменем. Збільшення її кроку завжди рівномірно. В даний час спіраль Архімеда широко застосовується в техніці.

. Рослини і тварини. Ще Гете підкреслювавтенденціюприроди до спіральності. Гвинтоподібне спіралевидне розташування на гілках дерев помітили давно. Спіраль побачили в розташуванні насіння соняшнику, в шишках сосни, ананасах, кактусах тощо(рис.9). Спільна робота ботаніків і математиків пролила світло на ці явища природи. З'ясувалося, що в розташуванні листків на гілці, насіння соняшнику, шишок сосни проявляє себе ряд Фібоначчі, а стало бути, проявляє себе закон золотого перетину. Молекула ДНK закручена подвійною спіраллю. Гете називав спіраль «кривою життя» [22, с.81-93].

Багато математиків нехтували золотим перерізом і гармонією,бо не вірили в те, що світ - пропорційне ціле, що підкоряється закону гармонійного ділення - золотого перетину[17, с.171].

Закономірності «золотий» симетрії проявляються в енергетичних переходах елементарних часток, у будові деяких хімічних сполук, у планетарних і космічних системах, у генних структурах живих організмів. Ці закономірності, як зазначено вище, є в будові окремих органів людини і тіла в цілому, а також проявляються в біоритми і функціонуванні головного мозку і зорового сприйняття.

Форма спірально завитий раковини привернула увагу давньогрецького математика і фізика Архімеда . Він вивчав її і вивів рівняння спіралі. Спіраль, накреслені по цьому рівнянню, називається його іменем. Збільшення її кроку завжди рівномірно. В даний час спіраль Архімеда широко застосовується в техніці.

Серце б'ється безперервно - від народження людини до її смерті. Його робота повинна бути оптимальною, зумовленої законами самоорганізації біологічних систем. Відхилення від оптимального режиму викликають різні захворювання. А так як золота пропорція є одним з критеріїв самоорганізації в живій природі, природно припустити, що і в роботі серця можливий прояв цього критерію.

При роботі серця виникає електричний струм, що можна вловити спеціальним приладом і отримати криву - електрокардіограму (ЕКГ) з характерними зубцями, що відображають різні цикли роботи серця. На ЕКГ людини виділяються дві ділянки різної тривалості, відповідні систолічної та діастолічної діяльності серця. В. Цвєтков встановив, що у людини і інших ссавців є оптимальна («золота») частота серцебиття, при якій тривалості систоли, діастоли і повного серцевого циклу співвідносяться між собою в пропорції 0,382:0,618:1, тобто в повній відповідності із золотою пропорцією. Так, наприклад, для людини ця частота дорівнює 63 ударам за хвилину, для собак 94, що відповідає реальній частоті серцебиття в стані спокою.   
 Систолічний тиск крові в аорті одно 0,382, а діастолічний - 0,618 від середнього тиску крові в аорті. Частка обсягу лівого шлуночка при ударному викиді крові по відношенню до конечнодиастолическому обсягу у десяти видів ссавців у стані спокою становить 0,37-0,4, що в середньому також відповідає золотий пропорції. Таким чином, робота серця у відношенні тимчасових циклів, зміни тиску крові та обсягів шлуночків оптимізовано за одним і тим же принципом за правилом золотої пропорції [21, с.54].

Перший приклад золотого перерізу в будові тіла людини: якщо прийняти центром людського тіла точку пупа, а відстань між ступнею людини і точкою пупа за одиницю виміру, то зростання людини еквівалентний числа 1.618 [8, с.45].

У людини 2 руки, пальці на кожній руці складаються з 3 фаланг (за винятком великого пальця). На кожній руці є по 5 пальців, тобто всього 10, але за винятком двох двухфалангових великих пальців тільки 8 пальців створено за принципом золотого перетину. Тоді як всі ці цифри 2, 3, 5 і 8 є числа послідовності Фібоначчі.

Золотий перетин присутній в будові всіх кристалів, але більшість кристалів мікроскопічно малі, так що ми не можемо розглядати їх неозброєним оком. Однак сніжинки, також представляють собою водні кристали, цілком доступні нашому погляду. Всі вишуканої краси фігури, які утворюють сніжинки, всі осі, кола та геометричні фігури в сніжинки також завжди без винятків побудовані за досконалої чіткою формулою золотого перерізу [22, с.36-40].

Будова усіх що зустрічаються в природі живих організмів і неживих об'єктів, що не мають ніякого зв'язку і подібності між собою, сплановано за певною математичною формулою. Це є найяскравішим доказом їх усвідомленої створеного згідно якомусь проекту, задуму. Формула золотого перерізу і золоті пропорції дуже добре відомі всім людям мистецтва, бо це головні правила естетики. Будь-який твір мистецтва, спроектоване в точній відповідності з пропорціями золотого перерізу, являє собою довершену естетичну форму.

За цим законом Великого Божественного Творіння створені галактики, створені рослини і мікроорганізми, тіло людини, кристали, живі істоти, молекула ДНК і закони фізики, тоді як вчені і люди мистецтва лише вивчають цей закон і прагнуть наслідувати йому, втілювати цей закон у своїх творах.



Рис.10. Приклади відношень

Числа Фібоначчі у космосі

Природа повторює свої знахідки, як в малому, так і у великому. За золотим спіралях закручуються багато галактик, зокрема і галактика Сонячної системи.З історії астрономії відомо, що І. Тіціус, німецький астроном XVIII ст., за допомогою послідовності Фібоначчі знайшов закономірність та порядок у відстанях нашої сонячної системи.Рукава багатьох спіралеподібних галактик розташовані згідно з послідовністю чисел Фібоначчі.

Число Фібоначчі в архітектурі, мистецтві

Багато вчених намагається розгадати секрети піраміди в Гізі (рис.11). Ключ до геометричного секрету піраміди в Гізі, який так довго був длялюдства загадкою, насправді,в тому, що піраміда побудована так, щоб площа кожної з її граней дорівнювала квадрату її висоти.



Рис.11

Довжина грані піраміди дорівнює 783,3 фута (238,7 м), висота піраміди - 484,4 фута (147,6 м). Довжина грані, поділена на висоту, дає співвідношенняφ=1,618. Висота 484,4 фута відповідає 5813 дюймам (5-8-13) - це числа з послідовності Фібоначчі.

Художники, вчені, модельєри, дизайнери роблять свої розрахунки, креслення або начерки, виходячи зі співвідношення золотого перерізу. Вони використовують мірки з тіла людини, створеної також за принципом золотої перетину. Леонардо Да Вінчі і Ле Корбюзье перед тим як створювати свої шедеври брали параметри людського тіла, створеного за законом Золотий пропорції. Пропорції різних частин нашого тіла становлять число, дуже близьке до золотого перетину. Якщо ці пропорції збігаються з формулою золотого перерізу, то зовнішність або тіло людини вважається ідеально складеними.

Будь-який музичний твір має часову довготу і ділиться деякими «естетичними віхами» на окремі частини, які звертають на себе увагу та полегшують сприйняття цілого. Цими віхами можуть бути динамічні та інтонаційні кульмінаційні пункти музичного твору.

Аналіз великого числа музичних творів дає висновок, що організація твору побудована так, що кардинальні частини, поділені віхами, утворюють ряди золотого перерізу. Найбільша кількість творів, які мають золотий переріз: Аренський - 95%, Бетховен - 97%, Гайдн - 97 %, Моцарт - 91%, Скрябін - 90 %, Шопен - 92 %, Шуберт - 91 %.

Висновки

Мета даної курсової роботи виявити застосування чисел Фібоначчі. У ході роботи було виконано аналіз літератури з даної теми, в результаті цього було визначено основні поняття чисел Фібоначчі та «золотої пропорції».

Числа Фібоначчі - елементи числової послідовності

, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, ... , в якій кожне наступне число дорівнює сумі двох попередніх чисел. Назва цієї послідовності в честь середньовічного математика Леонардо Пізанського (відомого як Фібоначчі ).

Золотий переріз - це таке пропорційне ділення відрізку на частини, при якому весь відрізок так відноситься до більшої частини, як найбільша частина відноситься до меншої; тобто менший відрізок так відноситься до більшого, як більший до всього a: b = b: c або с: b = b: а.

Теорія чисел Фібоначчі використовується в багатьох галузях: в математиці, хімії, теорії інформації, архітектурі тощо. Числа Фібоначчі знайшли своє відображення в природі. З’ясувалося, що в розташуванні листя на гілці, насіння в соняшнику, шишок на сосні проявляється ряд Фібоначчі, а отже, закон «золотого перерізу». Частини людського тіла відносяться як числа Фібоначчі. Також числа Фібоначчі та золоту пропорцію можна зустріти в побуті. Наприклад, поштові листівки виготовляють у вигляді прямокутника, відношення сторін у якому дорівнює числу φ. Якщо від цього прямокутника відрізати найбільший можливий квадрат, то отримаємо прямокутник, подібний даному. Процес цей є нескінченним.

Всі ми бачили пташине яйце але не всі знають, що відношення довжин від гострого кінця до точки, що позначає найширшу його частину та довжини від тупого кінця до цієї ж точки дорівнює відношенню одиниці до φ

Дана тема буде актуальною ще довгий час, і будуть відкриватися все нові і нові факти, що підтверджують присутність і вплив послідовності Фібоначчі на життя.

Список використаної літератури

1. «Замечательные числа Фибоначчи» /Калейдоскоп «Кванта»//- М.: Квант. - 1988. - №3.- 32с.

2. Борисовский Г.Б. Наука, техника, искусство.- М.,1969.-152с.

. Бутусов К.П. Золотое сечение в солнечной системе.- В кн.: Астрометрия и небесная механика.- М.,1978.-500с.

. Васютинський Н.А. Золотая пропорция [Електронний ресурс] /Н.А Васютинський.- Режим доступу: http://padabum.com/d.php?id=26420 − Загол. с экрана.

. Вейль Г. Симетрия.- М.,1968.-192с.

6. Волошинов А.В. Математика и искуство. [Електронний ресурс] / А.В. Волошинов. - Режим доступу: <http://chuev.trinitas.pro/> − Загол. с экрана.

. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. [Електронний ресурс] / Н.Н. Воробьев.- Режим доступу: http://www.px-pict.com/7/4/9/1.html− Загол. с экрана.

. Гика М. Эстетика пропорций в природе и искусстве. - М., 1936.-118с.

. Гримм Г.Д. Пропорциональность в архитектуре.- М.,1935.-148с.

. История математики с древнейших времён до начала XIX столетия (под ред. А. П. Юшкевича), том II, М., Наука, 1972.-260-267с.

. Карпушина Н. “Liber abaci” Леонардо Фибоначчи, Математика в школе, № 4, 2008.

. Кеплер Й. Тайны мира. [Електронний ресурс] / Й.Кеплер.- Режим доступу: http://padabum.com/d.php?id=26420 − Загол. с экрана.

. Кордемский Б.А. «Увлечь школьника математикой». - М.: Просвещение, 1981. 79-83с.

. Лиман М. М. Школьникам о математике математиках. - М.: Просвещение, 1981.-112с.

. Лэнгдон Н., Снейп Ч. С математикой в путь: Пер. с англ. - М.: Педагогика, 1987. - 12-13с.

. Маркушевич А.И. Возвратные последовательности. - М.: Наука, 1975.

. Марутаев М.А. О гармонии как закономерности.- М.,1978.-130-233с.

. Пидоу Д. Геометрия и искусство. - М.: Мир, 1979.- 210с.

. Соколов. Тайны золотого сечения// Техника молодежи.-1978.-№5.

. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. М.,1984.-226с.

. Урманцев Ю.А. Золотое сечение// Природа.-1968.-№11.

. Урманцев Ю.А. Симетрия природы и природа симметрии. - М.,1974.-229с.

. Шевелев И.Ш.и др. Золотое сечение. [Електронний ресурс] / И.Ш. Шевелев.- Режим доступу: http://rutracker.org/forum/viewtopic. − Загол. с экрана.