ЗМІСТ

ВСТУП

. ЖИТТЯ ВЕЛИКОГО МАТЕМАТИКА

. МНОГОЧЛЕН ТЕЙЛОРА

. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

.1 Тейлорова формула із залишковим членом у формі Пеано

.2 Тейлорова формула із залишковим членом у Лагранжовій формі

.3 Тейлорова формула для многочлена

.4 Тейлорова формула в диференціальній формі

.5 Формула Тейлора із залишковим членом в інтегральній формі

. РОЗВИНЕННЯ ДЕЯКИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ ЗА ФОРМУЛОЮ ТЕЙЛОРА

.1 Формула f(x) = ex

.2 Функція f(x) = sin x

.3Функція f(x) = cos x

.4 Логарифмічна функція f(x)=ln(1+х)

.5 Степенева функція f(x)=(1+x)α

. ЗАСТОСУВАННЯ ФОРМУЛИ ТЕЙЛОРА

ВИСНОВОК

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

ДОДАТКИ

ВСТУП

Математичний аналіз один з найважливіших розділів математики, він включає дві основні частини: диференціальне і інтегральне числення. Математичний аналіз виник приблизно в XVIII столітті.

Розділ математичного аналізу, в якому вивчається похідні і диференціали функції і і застосування до дослідження функцій, називається диференціальним численням. Оформлення цього розділу в окрему дисципліну пов'язаний з іменами І. Ньютона і Г. Лейбніца. Вони сформулювали основні положення диференціального числення і чітко вказали на взаємно обернений характер операції диференціювання і інтеграції. Створення цього розділу відкрило нову епоху в розвитку математики.

Диференціальне числення відіграє величезну роль в математичному аналізі. Тому так поважно вивчити формули диференціального числення.

Метою даної роботи є вивчення можливостей практичного вживання формули Тейлора.

Завдання: вивести Тейлорову формулу-потужний математичний інструмент дослідження функцій, обчислення границі і наближеного обчислення значень функцій,навчитися застосовувати на практиці, а також розглянути приклади розкладання елементарних функцій по формулі.

Об’єкт: дослідження функцій і кривих ліній.

Предмет: застосування формули Тейлора.

1. ЖИТТЯ ВЕЛИКОГО МАТЕМАТИКА

Брук Тейлор (англійський математик) народився 18 серпня 1685р. у селі Едмонтон в графстві Мідлсекс, у восьми милях від Лондона. Його дід користувався увагою з боку Кромвеля, батько був шталмейстером. Хлопчик отримав прекрасне виховання, загальне, а також художнє і музичне .

У 1701 році, коли Тейлору виповнилося 15 років, він поступив в Кембріджський університет, в коледж Сент-Джон. Якраз в цей час Ньютон остаточно розлучився з Кембриджем, але, звичайно, залишався кумиром молодих математиків. До них приєднався з самої своєї появи в Кембріджі і молодій Брук Тейлор.

У 1709 році Тейлор отримав ступінь бакалавра, а в 1714 році ступінь доктора права. Незалежно від цього він вивчав математику.

До 1712 року в його активі числиться вже два мемуари: "Про центр коливань" і " Про підйом води між двома площинами". Статті Тейлора були визнані настільки цінними, що в тому ж році його обрали членом Королівського суспільства.

У 1714р. Тейлор представив cуспільству рукопис своєї книги "Метод приростів пряма і обернена". У 1716 р. Тейлор зробив поїздку до Парижа. Увага з боку вчених, знаки пошани, цікаві знайомства в Парижі - все це справило гарне враження на Тейлора. Але рокова "хвороба століття"-перехід від природних наук до теології і містики оволоділа і Тейлором. У 1718 р. він йде з посади секретаря Королівського суспільства, щоб звільнити час для філософської роботи.

У 1721р. Тейлор одружувався, що викликало розрив з батьком. Щастя, куплене такою дорогою ціною, виявилося неміцним. У 1723р. Тейлор втрачає дружину і дитину. У 1725р. він знову одружується - вже при повному схваленні батька. Але щастя і цього разу не прийшло до Тейлора: у 1730 р. дружина померла при пологах. Правда залишилася дівчинка, але Тейлор був безутішний в своєму горі. Його здоров'я різко погіршувалося і більше не відновлювалося.

29 грудня 1731р. він помер і був похоронений в Лондоні.

Досягнення в математиці:

Відомий тим, що його ім'ям названа загальна формула розкладання функції в степеневий ряд. Тейлор започаткував математичне вивчення задачі про коливання струни. Йому належать заслуги в розробці теорії кінцевих різниць. Тейлор також автор робіт про перспективу, центр гойдання, взаємодію магнітів, капілярності, зчеплення між рідинами і твердими тілами [посилання 1].

2. МНОГОЧЛЕН ТЕЙЛОРА

Відомо, що найбільш простими функціями в сенсі обчислення є многочлени. Виникає питання про можливість заміни функції f в околі точки x0 многочленом певної міри.

З визначення диференціювання функції f в точці x0 випливає, що якщо= f (x) диференційована в точці x 0, то її приріст можна представити у вигляді

∆f ( x 0 )= f ′(x 0 ) ∆x + о( x),

f(x)=f(x 0 )+f ′(x 0 )(x- x 0 )+о(x- x 0 ).

Іншими словами існує многочлен першого ступеня

P1(x)=f(x0)+b1 (x-x0), (1)

такий що при x → x0

f(x)=P1(x)+о(x-x0),

причому P1(x) задовольняє такі умови: P1(x0)=f(x0), P′(x0)=b1=f ′(x0).

Поставимо більш загальну задачу. Нехай функція, визначена в деякій околі точки x0 має в цій точці n похідних f ′(x0), f ′′ (x 0 ), f ′′′( x 0 )... f (n)( x 0).

Потрібно з’ясувати, чи існує многочлен Pn(x) ступеня не вище n такий, що

f (x) = Pn (x )+ o( x - x0 )

Знайдемо многочлен ступеня не вище n (запис якого аналогічна (1))

Pn (x) = b0 + b1 (x - x 0) + b2 (x - x0)2 + ... + bn(x - x0)n, (2)

за умови, що значення многочлена Pn (x) і всіх його похідних до n-го порядку включно в точці x0 збігаються зі значеннями функції f (x) та її відповідних похідних в тій же точці:

f(x0)=Pn(x0), f ′(x0)=Pn(x0), …, f(n)(x0)=Pn(n)(x0). (3)

Визначимо коефіцієнти b0, b1, ..., bn , так щоб вони задовольняли умови (3). Для цього попередньо обчислимо похідні Pn(x):

Pn′(x)=b1+2b2(x-x0)+3b3(x-x0)2+…+nbn(x-x0)n-1n′′(x)=2∙1b2+3∙2b3(x-x0)2+…+n(n-1)bn (x-x0)n-2 (4)‴(x)=3∙2b3+…+n(n-1)(n-2)bn (x-x0)n-3

……………………………………………………(n)(x)=n(n-1)(n-2) ∙∙∙2∙1b

Підставляючи в ліві частини рівностей (2) і (3) замість х значення x0 отримаємо значення всіх коефіцієнтів bi:

f(x0)=Pn(x0)=b0, b0=f(x0)

f ′(x0)=Pn′(x0)=b1 , b1=f ′(x0)

f ″(x0)=Pn″(x0)=2∙1∙b2 , b2=  f″(x0) (5)

f‴(x0)=Pn‴(x0)=3∙2∙1∙b3 , b3=f‴(x0)

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

f(n)(x0)=Pn(n)(x0)=n!bn , bn= f(n)(x0)

Факторіалом числа n називається добуток послідовних натуральних чисел, починаючи з 1 до n включно 1∙2∙3∙… ∙(n-1)n і позначається

n!=1∙2∙3∙… ∙(n-1)n.

Зауваження! За домовленістю 0!=1.

Тепер можемо підставити отримані значення коефіцієнтів у рівність (2), і отримаємо многочлен виду

Pn(x) = f(x0) + ( x-x0)+ (x-x0)2 +…+  (x-x0)n,

який називається многочленом Тейлора за степенями ( x-x0) функції f (x) [посилання 2].

3. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Позначимо через Rn(x) різницю значень даної функції f(x) і побудованого многочлена Pn(x): Rn(x)=f(x)- Pn(x) (додаток 1).

Звідси f(x)= Rn(x)+Pn(x), а в більш розгорнутій формі має вигляд:

Pn(x) = f(x0) + (x -x0)+(x-x0)2 +…+(x-x0)n + Rn(x) (6)

Функція (6) називається формулою Тейлора, а Rn(x) називається залишковим членом формули Тейлора [посилання 3].

Залишковий член формули Тейлора Rn(x) визначає похибку наближення функції f(x) її многочленом Рп(х).

Якщо вважати, що залишок Rn(x) малий, то його можна відкинути без великої погрішності; при цьому виходить наближена формула

Pn(x) ≈ f(x0) +  ( x-x0) + (x-x0)2 +…+ (x-x0)n,

яка дає можливість для наближеного знаходження значень функцій f(x).

.1 Тейлорова формула із залишковим членом у формі Пеано

Доведемо, що

Rn(x)=o(x-x0)п ↔  = 0.

Згідно з визначенням многочлена P n(x) випливає, що

Rn (x0) = Rn′ (x0) = Rn″(x0) =…= Rn(n)(x0) = 0.

Для обчислення границі  застосуємо правило Лопіталя n разів і отримаємо:

 = =…=  =

== 0

тобто Rn (x) = o(x-x0)n при x→x0, оскільки Rn (x) - величина вищого порядку , чим (х - х0)п .■ Таким чином доведена теорема.

Теорема 1.

Якщо функція y=f(x) означена на інтервалі (a, b) і п разів диференційована в околі точки х0, то правдива формула

f(x) = f(x0) +  (x-x0) +  (x-x0)2 +…+  (x-x0) n +o(x-x0)n

або можемо записати у скороченій формі

f(x) = (x-x0) k+ o(x-x0)n, x→x0, (7)

де Rn (x) = o(x-x0)n -залишковий член у формулі Пеано [посилання 4].

Формула із залишковим членом у формі Пеано носить локальний характер і тому її праву частину називають асимптотичним представленням функції f в околі точки x0. Цю формулу можна використовувати для наближених обчислень значень функції f в точках, наближених до точки x0, оскільки відомий порядок погрішності Rn(x) .

Відзначимо також, що формула (7) вельми ефективна при відшуканні меж функцій.

Якщо в Тейлоровій формулі покласти х0=0, дістанемо її окремий випадок - формулу Тейлора - Маклорена , яка є асимптотичним представленням функції f в околі 0.

f(x) = f(0) +  x +  x 2 +…+  x n + o(x)n

f(x) = xk + o(xn). (8)

Ми отримали так звану формулу Маклорена із залишковим членом у формі Лагранжа.

Слід зазначити, що при розкладанні функції в ряд, вживання формули Маклорена переважає, чим вживання безпосередньо формули Тейлора, оскільки обчислення значень похідних в нулі простіше, ніж в якій-небудь іншій точці, звичайно, за умови, що ці похідні існують.

.2.Тейлорова формула із залишковим членом у Лагранжовій формі

Існують різні форми запису залишкового члена Rn (x) Тейлорової формули. У наближених обчисленнях зручною є Лагранжова форма залишкового члену.

Теорема 2.

Якщо функція y = f(x) означена й (n+1) разів диференційована в околі точки х0, то виконується формула

f(x) = f(x0) +  ( x-x0) +  (x-x0)2 +…+  (x-x0) n+ Rn(x),

де Rn(x) =(x-x0)n+1-залишковий член у Лагранжовій формі.

Доведення теореми 2 див. (додаток 2).

.3 Тейлорова формула для многочлена

Нехай задано многочлен

Pn(x)=b0+b1x+…+bnxn.

Для будь-якого х0 цей многочлен можна зобразити як суму степенів різниці

х-х0 , узятих з деякими коефіцієнтами. Покладемо

х=х0+t

Тоді Pn(x)=Pn(x 0+t)=b0+b1(x0+t)+…+bn(x0+t)n.

Розкриваючи у правій частині дужки і групуючи подібні члени, одержимо

Pn(x)=A0+A1t+A2t2+…+Antn 

Pn(x)=A0+A1(x-x0)+A2(x-x0)2+…+An(x-x0)n.

Вираз справа - буде Тейлоровим многочленом за степенями (х-х0) для многочлена Pn(x) степеня п. Отже,

Ak = , k = 0, n; Rn(x) = 0;(x) = Pn (x0) +  ( x-x0) +  (x-x0)2 +…+  (x-x0)n.

.4 Тейлорова формула в диференціальній формі

Покладаючи х - х0 = ∆ х, х = х0 + ∆ х у Тейлоровій формулі

f(x) = f(x0) +  ( x-x0) +  (x-x0)2 +…+  (x-x0) n+ Rn(x),(x0 +∆х) = f(x0) +  ∆х +  ∆х 2 +…+ ∆х n+ Rn(x).

Оскільки

f(x0 +∆х) - f(x0)= ∆ f(x0),

f(n) (x0) ∆xn =dn f(x0),

то Тейлорову формулу п-го порядку функції f можна записати у диференціальній формі

∆f(x0)=df(x0) +  +  + . . .+  + Rn(x).

.5 Формула Тейлора із залишковим членом в інтегральній формі

Теорема 3.

Нехай функція f має безперервну похідну (п+1)-го порядку в інтервалі

(х0-h, x0+h), де h>0. Тоді залишковий член Rn для x є (x0-h, x0+h) може бути записаним в вигляді:

Rn (x )=  (9)

Формула (9) називається залишковим членом формули Тейлора в інтегральній формі.

Доведення теореми 3 див. (додаток 3).

4. РОЗВИНЕННЯ ДЕЯКИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ ЗА ФОРМУЛОЙ ТЕЙЛОРА

Вживання формули Тейлора для розкладання функцій в степеневий ряд широко використовується і має величезне значення при проведенні різних математичних розрахунків. Безпосереднє обчислення інтегралів деяких функцій може бути зв'язане із значними труднощами, а заміна функції степеневим рядом дозволяє значно спростити завдання. Знаходження значень тригонометричних, зворотних тригонометричних, логарифмічних функцій також може бути зведене до знаходження значень відповідних многочленів.

Якщо при розкладанні в ряд взяти достатню кількість доданків, то значення функції може бути знайдене з будь-якою наперед заданою точністю. Практично можна сказати, що для знаходження значення будь-якої функції з розумною мірою точності (передбачається, що точність, яка перевищує 10 - 20 знаків після десяткової коми, необхідна дуже рідко) достатньо 4-10 члени розкладання в ряд.

Знайдемо розклад за формулою Тейлора при х0=0 (точніше за формулою Маклорена) функцій ех, sin x, cos x, ln(1+x), (1+x)a [посилання 5].

.1 Розвинення функції f(x) = ex

Функція f(x) = eх, що нескінченно диференційована на R. Знайдемо послідовні похідні від функції f(x) = eх :

f(x) = eх, f(0)=1,

f′ ′(x) = eх f′ ′(0) =1,

…………. ……………

f (n)(x) = eх f (n)(0) =1,

f (n+1)(x) = eх f (n+1)(Ѳx) =eѲx,

Підставляючи одержані значення f(0), f′ ′(0),…, f (n)(0), f (n+1)(Ѳx)у формулу Тейлора-Маклорена із залишковим членом у Лагранжовій формі, дістаємо

ex=1+x+

Rn(x)=

де 0<Ѳ<1.

Зауважимо, що для будь-якого х:

.

.2 Розвинення функції f(x) = sin x.

Функція f(x) = sin x нескінченно диференційована на R. Знайдемо послідовні похідні від f(x) = sin x:

а потім цикл знову повторяється. Тому при підстановці х0 = 0 також виникає повторення:

f(x) = sin x, f(0)=0,

f′ ′(x) = cos x=sin(x+ ), f′ ′(0) =1,

f ″ (x)= -sin x= sin(x+2), f ″ (x)=0,

f ‴(x)= -cos x=sin(x+3  ), f ‴(x)=-1,

…………… …………

f (n)(x) = sin (x+ f (n)(0) =sin ,

f (n+1)(x) = sin(x+(n+1)), f (n+1)(Ѳx)=sin (Ѳx+(n+1) Отже,



У Тейлоровому многочлені для sin x рівні нулеві коефіцієнти при парних степенях х, так що многочлен степеня (2п+1) та степеня (2п) збігаються.

Підставляючи знайдені значення похідних у формулу Тейлора-Маклорена, дістаємо

sin x = x -  +  +  + …+ (-1)2 k-1  R2k-1 (x),

R2k+1(x)=

У цьому випадку, як і в попередньому, при усіх значеннях х:

.

.3 Розвинення функції f(x) = cos x

Оскільки (cos x)(n) = cos (x+n ), то

f(m)(0)=cos = 

+

R2k+2= 

.4 Розвинення функції f(x)=ln(1+ x)

Функція f(x)=ln(1+x) означена і нескінченно диференційована в інтервалі (-1;+∞). Знайдімо послідовні похідні цієї функції

f(x)=ln(1+x), f(0)=0,

f ′(x) = , f ′(0)=1,

f ″(x) = , f ″(0)= -1,

f ‴(x)= f ‴(0)= 2 1,

………………….. ………………

f (n)(x) = f (n)(0) =

f (n+1)(x)=, f (n+1)(x)=,

Підставляючи обчислені значення у формулі Тейлора-Маклорена, дістаємо розвинення ln(1+x)за формулою Тейлора-Маклорена із залишковим членом у Лагранжовій формі:

ln(1+x) = x,

Rn(x)=

.5 Розвинення функції f(x)=(1+x)α

Функція f(x)=(1+x)α ,αϵR, означена і нескінченно диференційована в інтервалі (-1;1). Знайдемо послідовно похідні від функції f(x)=(1+x)α.

(x)=(1+x)α,

f ′(x)=

f ″(x)=

f ‴(x)=

…………………………………

f(n)(x)=

f(n+1)(x) =,

f(0)=1,

f ′(0)=α ,

f ″(0)=α(α-1),

f ‴(0)= α(α-1)(α-2),

…………………

f(n)(0)= α(α-1)…(α-n+1),

f(n+1)(Ѳx)= α(α-1)…(α-n)(1+ Ѳx)α-n-1

Підставляючи знайдені значення функції та її похідні у формулу Тейлора-Маклорена, дістаємо:

(1+x)a=1+αx + x2 +…+ 

Rn(x)= 

Якщо α=mϵN, то всі члени формули Тейлора-Маклорена, починаючи з

(т+1)-го зникають, і формула Тейлора-Маклорена перетворюється на відому формулу Ньютонового бінома.



5. ЗАСТОСУВАННЯ ФОРМУЛИ ТЕЙЛОРА

. Формули Тейлора-Маклорена із залишковим членом у формі Пеано є джерелом асимптотичних формул.

Приміром, для функції f(x) = ex маємо:

ex = 1+ x +o(x),

ex = 1+  + o(x2),

ex = 1+  + o(x3).

Використаємо ці формули до обчислення границі:



= 

. Формулу Тейлора за степенями (х - х0) із залишковим членом у формі Лагранжа застосовують для обчислення наближених значень функції в

околі U (x0)х[посилання 6].

Значення f(x) в околі U (x0) обчислюють за формулою

f(x) ≈ f(x0) +  ( x-x0) + (x-x0)2 +…+ (x-x0)n

похибка наближення не перевищує



ВИСНОВОК

В даній роботі розглянуто формулу Тейлора. Ми за допомогою різних функції вивели формулу Тейлора, як потужного математичного інструменту дослідження функцій, обчислення границь і наближеного значення функції. А також всі її залишкові члени, за допомогою яких можемо розкладати елементарні функції , наприклад, ех, sin x, cos x, ln(1+x), (1+x)a. Для чого нам не потрібно знаходити 10-20 знаків після коми, а достатньо лише 4-10 членів розкладання в ряд. Також підтверджено, що такими формулами можливо і зручно користуватися практично (для учнів шкіл та вищих навчальних закладів ) у розрахунках , що не вимагають дуже високої точності.

А також в цій роботі наведенні приклади, які розв’язуються за допомогою елементарних функцій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

формула тейлор многочлен

1. Бугров Я. С. , Никольский С. М.; Высшая математика: Учеб. для вузов: В 3 т. / под ред. В. А. Садовничего. - 6-е изд., стереотип. - М.: Дрофа, 2004. - Т. 2: Дифференциальное и интегральное исчисление. - 512 c.

2. Електронний ресурс: Біографія Тейлора: <http://www.univer.omsk.su/omsk/Edu/Math/tteilor.htm>

. Електронний ресурс: «Формула Тейлора»: <http://matica.org.ua/kratkiy-kurs-lektsiy-po-differentsialnomu-ischisleniiu/5-3-formula-teylora>

. Електронний ресурс: «Остаток в формуле Тейлора и его оценка»: <http://webmath.exponenta.ru/s/kiselev1/node58.htm>

. О.І.Соколенко. Вища математика: підручник - Київ: Видавничий центр «Академія», 2003.-430с.

. Шкіль М.І. Математичний аналіз: В 2ч.-К.:Вища шк. Головне вид-во, 1981.-Ч.2-455с.

ДОДАТОК 1.

у

х

Як видно з малюнка Rп ( x ) має погрішність, що виникає при заміні функції

у = f ( x ) многочленом Pп ( x ). Для значень х з околу точки x0 , для яких погрішність Rп ( x ) досить мала, многочлен Pп (x) дає наближене представлення функції.

ДОДАТОК 2.

Доведення теореми 2.

Вимагатимемо, щоб функція f мала похідну (n+1) -го порядку в околі точки x0. Розгляньмо функцію g(x)=(x - x0)n+1 . Очевидно, що

g(x0) = g′(x0) = …= g(n)(x0) = 0,

g(n+1)(x0) = (n+1)! ≠ 0.

Застосуймо до функції Rn(x) та g(x) = (x - x0)n+1 теорему Коші. Тоді на підставі умови

R′n(x0) = R″n(x0) = …= Rn(n)(x0) = 0



= 

де c1 ϵ (x0 , x); c2 ϵ (x0 ,c1) , … , cn ϵ (x0, cn-1) ; ξ ϵ (x0 , cn).

Отже, показано, що

  ξ ϵ (x0 , х).

З урахуванням того, що

g(x) = (x - x0)n+1 ,

g(n+1) (ξ) = (n+!)!,

Rn(n)(ξ) = f (n+1) (ξ),

дістаємо залишковий член у Лагранжовій формі

Rn( x) =  (x - x0)n+1 , ξ ϵ (x0 , х).

Оскілки ξ ϵ (x0 , х), то ξ можна зобразити у вигляді

ξ = x0 +  (x - x0) , 0< < 1,

тобто залишковий член у Лагранжовій формі можна записати у вигляді

Rn(x) =  (x - x0)n+1.

ДОДАТОК 3.

Доведення теореми 3.

Так як f(x) - f(x0) = 

то, інтегруючи за частинами, отримаємо

f(x) - f(x0) = --f (t) (x-t)|xx0 +  =

= f ′(x0)(x-x0) + 

Нехай для деякого m ≤ n вже доведено, що

f(x) - f(x0)=  (x-x0)k +  (9)

Інтегруючи за частинами останній доданок, бачимо, що

 = - =

= -  |xx0 + 

=  (x - x0)m + .

Підставляючи цей вираз в (9) , отримуємо ту ж саму формулу з заміною m на m+1 . Таким чином, формула (9) доведена по індукції для всіх m ≤ n. При т=п вона приводиться до співвідношення (8).