Контрольна робота

на тему: Інтегро-сумарні нерівності типу Біхарі та їх застосування

Зміст

Вступ

. Iнтегральна нерiвність Бiхарi

. Застосування інтегро-сумарних нерівностей типу Біхарі

Висновки

Список використаної літератури

Вступ

Нерівності широко застосовуються в усіх галузях математики, оскільки виражають важливі закономірності, властиві об’єктам, що вивчаються в математиці, механіці, фізиці, економіці та інших науках (при цьому роль нерівностей не менша, ніж роль рівнянь) і, крім того, є ефективним засобом математичних досліджень і доведень. Протягом останніх років теорія нерівностей сформувалась у самостійну математичну дисципліну.

Теорія інтегральних нерівностей бере свій початок з праці Т. Гронуолла, опублікованої в 1919 році, а також досліджень С.А. Чаплигіна, проведених у той же час, по створенню нового методу наближеного інтегрування диференціальних рівнянь, праць учених Т. Важевського, М. В. Азбелєва, З.Б. Цалюка, В.М. Алексеєва, Б.Н. Бабкіна, Н.Н. Лузіна, В.М. Матросова, Р. Беллмана та багатьох інших, які з’ясували, обґрунтували та поширили у своїх працях межі застосування теорем типа теореми Чаплигіна, та заклали основи для ефективного використання апарату інтегральних нерівностей для отримання та побудови алгоритмів якісного аналізу реальних фізичних процесів.

Розвитку теорії багатовимірних інтегральних нерівностей, який почався у 60-х роках минулого століття, присвячені праці багатьох учених, серед яких: R.P. Agarwal, Akinyele Olusola, P.R. Beesack, R. Bellman, K.L. Cooke, A. Corduneanu, V. Lakshmikantham, S. Leela, S.G. Hristova, D.D. Bainov, B.G. Pachpatte, P.S. Simeonov, С.С. Yeh, W. Walter, Р. Гутовськи, А.А. Мартинюк, З.Б. Цалюк, О.М. Філатов, Л.В. Шарова.

Стрімкий розвиток теорії диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням, закладений у працях М.М. Крилова, М.М. Боголюбова, Ю.О. Митропольского, А.М. Самойленка, М.О. Перестюка, їх послідовників та учнів М.У. Ахмедова, О.А. Бойчука, В.Г. Самойленка, В.Е. Слюсарчука та багатьох інших, викликав необхідність розробки методу інтегральних нерівностей для розривних функцій, оскільки математичною моделлю багатьох фізичних та технічних процесів з миттєвими збуреннями є системи диференціальних рівнянь з імпульсними збуреннями

При дослідженні різноманітних властивостей (існування, єдиність, неперервна залежність від початкових умов, стійкість, залежність від параметра і т.д.) розв’язків систем диференціальних рівнянь з імпульсними збуреннями, задача часто зводиться до знаходження оцінки розривних функцій, які задовольняють інтегральним нерівностям.

Успіх дослідження пов’язаний з отриманням оцінки функції, яка задовольняє інтегральній нерівності, через відомі функції та параметри, які входять у нерівність.

Першою фундаментальною працею, в якій були розглянуті інтегральні нерівності для розривних функцій та їх застосування, є монографія А.М. Самойленка та М.О. Перестюка. В цій праці отримано узагальнення результатів Гронуолла-Беллмана та Біхарі на випадок розривних функцій, що дозволило встановити умови стійкості, асимптотичної стійкості розв’язків систем диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням. Питанням існування та єдиності розв’язків диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням присвячені праці В.E. Слюсарчука. Подальший розвиток теорії інтегральних нерівностей для розривних функцій та їх застосувань, а саме - узагальнення вже існуючих результатів на випадок розривних функцій багатьох змінних, пов’язаний з працями С.Д. Борисенка, в яких отримані: нерівності, що містять кратні інтеграли для розривних функцій, інтегро-сумарні функціональні нерівності Вендрофа, доведені теореми методу Біхарі для розривних скалярних функцій від векторного аргументу. Однак всі ці результати отримані тільки для випадку, коли функція має скінчені розриви тільки у фіксованих точках простору.

Метою даної роботи є вивчення теорії інтегральних нерівностей для неперервних і розривних функцій та її застосування.

1. Iнтегральна нерiвність Бiхарi

Лема 1. Нехай невiд’ємна, кусково-неперервна на J = [t0, ∞[ функцiя V (t) з розривами першого роду в точках {ti}: t1 < t2 < …, , задовольняє iнтегро-сумарну нерiвнiсть

 (1)

інтегральний біхарі нелінійний диференціальний

де ψ(t) - додатна, монотонно неспадна на J функцiя, q(t) і 0, q(t)  C(J), ai і 0, r> 0. Тодi для V (t) справедливi такi оцiнки:

,(2)

,(3)

Лема 2. Нехай невiд’ємна, кусково-неперервна на J = [t0, ∞[ функцiя W(t) з розривами першого роду в точках {ti}: t1 < t2 < …, , задовольняє iнтегро-сумарну нерiвнiсть

(4)

де (t) > 0, p(t) і 0, p(t)  C(J), βi > 0, m, n > 0, m ≠1, (t) неспадна на J. Тодi W(t) задовольняє такi оцiнки:

(5)

(6)

(7)

Доведення. Очевидно, для 0<m<1, 0<n ≤1 (згiдно зi схемою, запропонованою в [2]), що 





.

Схема доведення для випадку m > 1, n і 1аналогічна.

Розглянемо систему диференцiальних рiвнянь вигляду

(8)

де A(u), B - постiйнi (n × n)-матрицi; u - деякий параметр, u D  R m  R n (m≤ n), D - деяка обмежена область, A(u)  C1 (D), A - матриця, записана в канонiчнiй формi.

Послiдовнiсть моментiв {ti} така, що ti → ∞ при i → ∞ i

.

Розв’язок x(t, u) системи (8) у загальному випадку є кусково-неперервною функцiєю з розривами 1-го роду при t = ti, причому

(9)

Для всіх  і

(10)

Будемо припускати, що (9), (10) виконанi для всiх u з областi D  Rm i функцiя x(t,u) неперервна за t злiва в точцi ti, тобто

(11)

Разом iз системою (8) розглянемо систему збуреного руху

(12)

Тут 

Нехай , де δ(t) - монотонно спадна функцiя  t > t0, причому iснує скiнченна границя

(13)

Припустимо, що матриця B + E невироджена, а послiдовнiсть моментiв часу {ti}, в яких вiдбувається миттєве збурення, задовольняє умову [1]

(14)

Нехай також знайдеться постiйна η така, що

(15)

Позначимо через x(t, u) розв’язок системи (8), який при t = t0дорiвнює x0 для всiх u  D.

Тодi



При .

Якщо γ (u) = max Re λk (A(u)), де λk - власнi числа матрицi A(u), то справедлива оцінка (аналогiчно з результатами [1-3])

(16)

Тут ε1 - довiльне як завгодно мале число. Тодi



де α2= maxλj[(E + B)T(E + B)];

(E + B)T - транспонована матриця; i(t0,t) - кiлькiсть точок {ti} на iнтервалi J = [t0,t[.

На пiдставi (14) отримаємо оцiнку

(17)



Нехай  - розв’язок системи

(18)

який обертається в  при t = t0. Тодi справедлива оцінка

(19)

Враховуючи (19), можна вважати, що для всiх u  D для матрицанту Ω(t, t0) системи (18) виконується нерiвнiсть



Тодi, якщо X(t, t0) - матриця Кошi системи (12), маємо

(20)

Оскiльки будь-який розв’язок x∗(t) (x∗(t0) = x∗0= = x0) системи (12) має вигляд x∗(t) = X(t, t0)x0, то з (20) отримаємо , як тільки

(21)

Розглянемо систему вигляду

(22)

Теорема 1. Припустимо, що для системи (22) справджуються такi умови:

1) 

) 

) 

) 

) 

) 

) 

) 

) .

Тодi тривiальний розв’язок системи (22):) асимптотично стiйкий;) рiвномiрно вiдносно t0 асимптотично стiйкий, якщо π(t0), p∗(t0) не залежать вiд t0.

Доведення. Для довiльного розв’язку системи (22) справедливе зображення [2]

(23)

На пiдставi леми 1 отримуємо



Враховуючи умови теореми, маємо

.

Теорема 2. Припустимо, що для системи (22) справджуються такi умови:

) 1-5 теореми 1;

) 

)

) 

) 

) 

) .

Таким чином, на пiдставi вищевикладеного можна зробити такi висновки:

) при n = 1 та φ(t) = const результат леми 2 збiгається з вiдповiдними результатами робiт [4, теорема 3.1.2, с. 176; 5, теорема 3.1.2, c. 176];

) при 0 < m = n < 1 та m = n > 1 з результату леми 2 випливає результат роботи [6];

) при P (t, x) = P (t)x, де P (t): ||P (t)|| ≤ C = const < ∞ та Ii(x) = Ii − const (n×n)-матрицi, з результату теореми 1 як наслiдок отримуємо теорему 4.2.4 [4, с. 268];

) результат теореми 2 узагальнює вiдповiднi дослiдження [1-8] iмпульсних нелiнiйних систем за лiнiйним наближенням.

2. Застосування інтегро-сумарних нерівностей типу Біхарі

Лема Гронуолла-Беллмана. Нехай функції  і - неперевні при ,  - стала і при  виконується нерівність

.(2.1)

Тоді при  справедлива нерівність

.(2.2)

Доведення. Помножимо обидві частини нерівності (2.1) на 



і позначимо . Тоді з останньої нерівності отримаємо

.

, то , .

.(2.3)

Використовуючи, (2.1) і (2.3) отримаємо (2.2). Лема доведена.

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

 ( - незбурений розвўязок), .(4.4)

Проводимо лінеаризацію системи диференціальних рівнянь (2.4) в околі точки 

, ,(2.5)

, .

Стійкість системи диференціальних рівнянь (2.4) в деяких випадках можна проаналізувати за допомогою дослідження стійкості лінеаризованої системи (2.5). Припустимо, що

, ,(2.6)

де постійна  в достатньо малому околі нуля .

Теорема 1. Якщо фундаментальна матриця  однорідної системи при будь-якому  і  задовольняє нерівність

(2.7)

з додатними і незалежними від  константами  і , то незбурений розвўязок  асимптотично стійкий при будь-якому виборі функції , яка задовольняє умові (2.2), якщо , причому для будь-якого розв'язку  системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь (2.4) для якого  виконується нерівність

 при .(2.8)

Доведення. Запишемо розвўязок системи звичайних диференціальних рівнянь (2.5) у вигляді

.

,

.

.

, , , .

Тоді, згідно леми

.

Теорема доведена.

Розглянемо автономну систему звичайних диференціальних рівнянь

.(2.9)

Лінеаризуємо систему (2.9) (, )

.(2.10)

Критерій стійкості автономної системи за першим наближенням:

а) Якщо корені характеристичного рівняння (2.1) задовольняють умові , , то незбурений розвўязок  системи диференціальних рівнянь (2.9) асимптотично стійкий;

б) Якщо серед коренів характеристичного рівняння (2.1) знайдеться хоча б один з додатною дійсною частиною, то незбурений розвўязок  системи диференціальних рівнянь (2.9) нестійкий;

в) Якщо лінійна система стійка, тобто серед коренів характеристичного рівняння (2.1) знайдуться деякі з нульовими дійсними частинами, то незбурений розвўязок  системи диференціальних рівнянь (2.9) може бути як стійкий так і не стійкий.

Приклад Дослідити на стійкість незбурений розвўязок x=y=0 системи

,.

Розв'язання. Розглянемо два підходи, які описані вище.

, .

Згідно критерію система стійка.

Знайдемо фундаментальну матрицю. Загальний розвўязок системи має вигляд

.

Тоді фундаментальну матрицю запишемо таким чином

.

Оскільки ця матриця обмежена, то незбурений розвўязок x=y=0 є стійким.

Висновки

У даній роботі вивчено теорію інтегральних нерівностей для неперервних і розривних функцій та її застосування.

У роботi розглядається новий аналог леми Гронуолла-Беллмана-Бiхарi для нелiнiйних iнтегро-сумарних нерiвностей, що узагальнює результати робiт [1-6]. Поширено метод “заморожування коефiцiєнтiв” для iмпульсних систем диференцiальних рiвнянь з видiленим лiнiйним наближенням та нелiнiйностями нелiпшицевого типу, що входять у праву частину збуреної системи. Отримано новi достатнi умови асимптотичної стiйкостi (рiвномiрної) тривiального розв’язку систем диференцiальних рiвнянь при параметричному та нелiпшицевому типi iмпульсного збурення.

Проаналізувавши результати наукових досліджень, які отримані в теорії інтегральних нерівностей для розривних функцій, можна зробити висновок, що вони найбільш повно представлені у випадку, коли функції мають розриви у фіксованих точках простору. При цьому залишається відкритим питання знаходження оцінок для функцій багатьох змінних, які мають скінченні розриви різноманітного характеру на деяких заданих кривих або на заданих поверхнях.

Список використаної літератури

1. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импуль-сным воздействием // Дифференц. уравнения. - 1977. - 13. - С. 1981-1992.

. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. - Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1980. - 80 с.

. Самойленко А. М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. - Киев: Вища шк., 1987. - 287 с.

. Самойленко А.М., Борисенко С. Д., Матараццо Дж. та iн. Диференцiальнi моделi (стiйкiсть). - Київ: Вища шк., 2000. - 330 с.

. Samoilenko A. M., Borysenko S. D., Cattani C. et al. Differential models: stability, inequalities and esti-mates. - Kyiv: Naukova Dumka, 2001. - 328 p.

. Борисенко Д.С., Галло А., Тоскано Р. Iнтегральнi нерiвностi Гронуолла-Беллмана-Бiхарi для розривних функцiй та оцiнки розв’язкiв iмпульсних систем // Вiсн. Київ. ун-ту. Сер. фiз.-мат. науки. - 2005. - № 4. - С. 60-66.

. Борисенко С.С. Iнтегро-функцiональнi нерiвностi типу Беллмана-Бiхарi для розривних функцiй та їх застосування // Доп. НАН України. - 2009. - № 9. - С. 18-26.

. Borysenko S. On some generalizations Bellman-Bihari result for integro-functional inequalities for disconti-nuous functions and their applications // Nonlinear analysis and application 2009: Materials of the Inter. Scientific Conf. (Kyiv, April 2-4, 2009). - Kyiv: NTUU “KPI”, 2009. - P. 83.