# Реферат

# Динамика вращательного движения твердого тела

## Кинетическая энергия вращения твёрдого тела

## Момент инерции твердого тела

Рассмотрим твёрдое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси. Чтобы удержать ось от перемещений в пространстве, заключим её в подшипники. Опирающийся па нижний подшипник фланец Фл , предотвращает передвижение оси в вертикальном направлении .



Абсолютно твёрдое тело можно рассматривать как систему материальных точек с неизменным расстоянием между ними. Линейная скорость элементарной массы  равна , где -расстояние массы  от оси вращения. Следовательно, для кинетической энергии элементарной массы получается выражение



Кинетическая энергия вращающегося твёрдого тела складывается из кинетических энергий его частей.



Сумму, входящую в правую часть этого соотношения назовём моментом инерции I тела относительно оси вращения

 - момент инерции твёрдого тела.

Слагаемые этой суммы представляют момент инерции материальной точки относительно оси вращения

- момент инерции материальной

точки относительно оси вращения.

Размерность момента инерции [ I ]= 1 кг

Таким образом, кинетическая энергия тела вращающегося вокруг неподвижной оси, равна

 - кинетическая энергия вращающегося твёрдого тела.

## Вычисление моментов инерции некоторых тел правильной формы

### Согласно определению момент инерции твёрдого тела равен

,

где символом  обозначена элементарная масса . Элементарная масса  равна произведению плотности тела  в данной точке на соответствующий элементарный объём 

 .

Следовательно, момент инерции можно представить в виде

.

Это значение момента инерции является приближенным . Точное значение I получается при замене суммирования на интегрирование, т.е.

.

Эти интегралы берутся по всему объёму тела .

Пример 1: Вычисление момента инерции тонкого стержня массы m и длинной l, вращающегося вокруг оси перпендикулярной стержню и проходящей через центр масс.



Будем считать стержень однородным, тогда







Другие примеры значений моментов инерции для некоторых тел правильной формы приведём без вычислений .

Пример 2: Полый тонкостенный цилиндр, тонкое кольцо :



 - момент инерции цилиндра или тонкого кольца

Пример 3: Сплошной цилиндр, диск.



 - момент инерции сплошного цилиндра или диска

Пример 4: Сплошной шар.



 - момент инерции шара.

Заметим, что во всех приведённых примерах, тела предполагаются однородными, и вычисляются моменты инерции относительно центральных осей,

т.е. осей проходящих через центр масс.

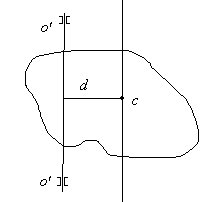
## Момент инерции тела относительно нецентральной оси

## Теорема Штейнера

Пусть тело вращается вокруг неподвижной нецентральной оси. Это тело обладает кинетической энергией

 , (1)

где I - момент инерции тела относительно данной нецентральной оси. Проведём через центр масс С ось ОО , параллельную данной нецентральной оси . Тогда вращение твёрдого тела можно представить как результат вращения центра масс С вокруг оси  и вращение твёрдого тела вокруг центральной оси ОО тоже с угловой скоростью w. Кинетическую энергию тоже можно представить как сумму двух слагаемых :



 , (2)

где - линейная скорость центра масс. C учётом (1) и (2) получаем

 - теорема Штейнера.

Теорема Штейнера: Момент инерции I относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I0 относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния d между осями :



Таким образом, теорема Штейнера, по существу, сводит вычисление момента инерции относительно произвольной оси к вычислению момента инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела.

## Момент импульса твёрдого тела относительно закреплённой оси. Главные оси и главные моменты инерции



Рассмотрим твёрдое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси. Возьмём на оси вращения точку О и будем характеризовать положение образующих тело материальных точек с помощью радиус-векторов , проведённых из этой точки. На рисунке показана i-я материальная точка с массой . Согласно определению момент импульса i-ой материальной точки относительно точки О равен

,

или, используя связь ,

 .

Для раскрытия двойного векторного произведения воспользуемся формулой



 .

кинетический энергия вращение инерция

Мы видим что, момент импульса i-ой материальной точки  не совладает по направлению с угловой скоростью , и его можно представить как сумму двух составляющих: осевой  и радиальной



.

Момент импульса всего твёрдого тела равен

 или 

где I - момент инерции твёрдого тела относительно оси вращения,  - составляющая момента импульса тела, перпендикулярная оси вращения. .

Нетрудно сообразить, что для однородного тела симметричного относительно оси вращения (для однородного тела вращения ) суммарный момент импульса направлен вдоль оси вращения в ту же сторону что и , и равен

 .

Действительно в этом случаи тело можно разбить на пары равных по массе, расположенных симметрично материальных точек. Сумма моментов каждой пары направлена вдоль вектора , следовательно, и суммарный момент импульса  будет совпадать по направлению с  и равен  .

Для несимметричного (или неоднородного) тела момент импульса , вообще говоря, не совпадает по направлению с вектором . При вращении тела вектор  поворачивается вместе с ним, описывая конус .

Заметим, что в случае вращения однородного симметричного тела, силы бокового давления подшипников на ось не возникают. В отсутствие силы тяжести подшипники можно было бы убрать, - ось и без них сохраняла бы своё положение в пространстве. Ось, положение которой в пространстве остаётся неизменным при вращении вокруг неё тела в отсутствии внешних сил, называется свободной осью тела

Можно доказать, что для тела любой формы и с произвольным распределением масс существуют три взаимно перпендикулярные, проходящие через центр масс оси, которые могут служить свободными осями: эти оси называются главными осями инерции тела. Моменты инерции относительно главных осей называются главными моментами инерции тела.

В общем случае эти моменты различны: .

Для тела с осевой симметрией два главных момента инерции имеют одинаковую величину, третий же, вообще говоря, отличен от них: .

И, наконец, в случае тела с центрально симметрией, все три главных момента одинаковы:.

## Примеры:

Параллелепипед:  Диск: 



Цилиндр:  Шар: 





## Основной закон динамики вращения твёрдого тела

Будем рассматривать твёрдое тело как систему жёстко связанных материальных точек с массой , и пусть ось вращения неподвижная. Для всякой системы материальных точек имеет место закон изменения суммарного момента импульса во времени:



Это уравнение справедливо и для твёрдого тела. В этом случае - момент импульса тела, а справа стоит - сумма моментов внешних сил, действующих на тело, т.е.

- основной закон динамики вращения твёрдого тела

Если ось вращеня главная, то , и получаем

,

т.е.  - аналог второго закона Ньютона для

вращательного движения твёрдого тела

В случае главной оси вращения при суммарном моменте внешней силы, действующем на тело, равном нулю, имеет место закон сохранения момента импульса твёрдого тела:

 - закон сохранения момента импульса твёрдого тела.

Если суммарный момент внешних сил , то он совершает работу, которая приводит к увеличению кинетической энергии вращающегося твёрдого тела (в этом случае потенциальная энергия ).



Итак  - работа при вращении твёрдого тела

Вычислим также мощность при вращении твёрдого тела:

 ,

 - мощность при вращении твёрдого тела

## Аналогия между поступательным и вращательным движением

|  |  |
| --- | --- |
| Поступательное движение | Вращательное движение |

s(t) - путь  - линейная скорость

 - линейное ускорение

m - масса

 - сила

 - 2-ой закон

Ньютона

 - импульс

-кинетическая

энергия

 -работа

-мощность - угол поворота

 - угловая скорость

 - угловое ускорение

I - момент инерции

 - момент силы

- 2-ой закон Ньютона

для вращательного движения

 - момент импульса

 - кинетическая

энергия вращающегося

твёрдого тела

 - работа при

вращательном движении

 - мощность при

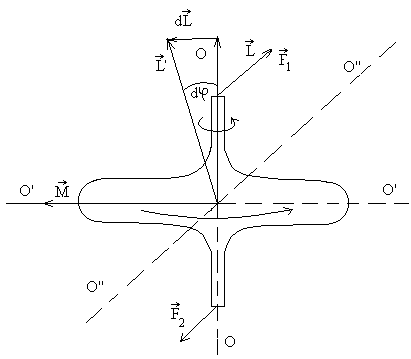
|  |  |
| --- | --- |
| вращательном движении |  |

Из этого сопоставления легко заключить, что во всех случаях роль массы играет момент инерции, роль силы -момент силы, роль импульса -момент импульса, и т.д.

## Гироскопы

Гироскопом (или волчком) называется массивное симметричное тело, вращающееся с большой скоростью вокруг оси симметрии. Эту ось будем называть осью гироскопа. Ось гироскопа является одной из главных осей инерции. Поэтому, если она не поворачивается в пространстве, момент импульса равен , где I -момент инерции относительно оси гироскопа.

При попытке вызвать поворот оси гироскопа наблюдается своеобразное явление, получившее название гироскопического эффекта: под действием сил, которые, казалось бы, должны вызвать поворот оси гироскопа ОО вокруг прямой(см. рисунок), ось гироскопа поворачивается вокруг прямой О''О'' направленной вдоль направления действия сил  и  . Поведение гироскопа оказывается полностью соответствующим законам динамики вращательного движения. Действительно, момент сил  и  направлен вдоль прямой О'О'. За время dt момент импульса гироскопа  получит приращение , которое имеет такое же направление, как и . Спустя время dt момент импульса гироскопа будет равен  и будет лежать в плоскости рисунка.. Таким образом, ось гироскопа повернётся вокруг прямой О''О'' на некоторый угол .



Из рисунка видно, что

,

Отсюда следует, что поворот оси гироскопа в новое положение произошел с угловой скоростью

.

Перепишем это соотношение в виде : 

Векторы ,  и  взаимно перпендикулярны (вектор направлен вдоль прямой О’’О’’, на нас). Поэтому связь между ними можно записать в векторном виде :

 .

Заметим, что эта формула справедлива лишь в том случае, если w’ << w

Допустим, что ось гироскопа может свободно поворачивается вокруг некоторой точки О (см. рисунок).



Рассмотрим поведение такого гироскопа в поле сил тяжести. Момент сил, приложенных к гироскопу, равен по величине : , где m - масса гироскопа, l - расстояние от точки О до центра инерции гироскопа,  - угол, образованный осью гироскопа с вертикалью.

Под действием момента сил  момент импульса получит за время dt приращение , перпендикулярное вектору .

При этом вертикальная плоскость, проходящая через ось гироскопа, повернётся на угол . Угол  при этом не меняется.

Таким образом, в поле сил тяжести ось гироскопа с неподвижной точкой О поворачивается вокруг вертикали, описывая конус. Такое движение гироскопа называется прецессией Угловую скорость прецессии w’ можно найти, приняв во внимание полученное ранее соотношение

.

Подставляем сюда M , получим

 , отсюда  - угловая скорость прецессии.

Литература

Савельев И. В. Курс физики. Т. 1. Механика. Молекулярная физика. - М.: Наука, 1989. - 350 с.

Савельев И. В. Курс физики. Т. 2. Электричество и магнетизм. - М.: Наука, 1989. - 496 с.

Савельев И. В. Курс физики. Т. 3. Квантовая физика. - М.: Наука, 1989. - 301 с.

Сивухин Д. В. Механика. - М.: Физматлит, 2002. - 576 с.

Сивухин Д. В. Термодинамика и молекулярная физика. - М.: Физматлит, 2002. - 592 с.

Сивухин Д. В. Электричество. - М.: Физматлит, 2002. - 688 с.

Сивухин Д. В. Оптика. - М.: Физматлит, 2002. - 752 с.

Сивухин Д. В. Атомная физика. - М.: Физматлит, 2002.