Федеральное государственное образовательное бюджетное

учреждение высшего профессионального образования

«Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»

Кафедра «Прикладная математика»

Дисциплина «Дифференциальные уравнения»

Домашнее творческое задание

На тему «Функции Бесселя»

Выполнила:

Студенка гр. ПМ2-1

Голубева В.И.

Проверил:

Свирщевский Сергей Ростиславович

Москва - 2014

**Оглавление**

Введение

. Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах

. Бесселевы функции первого рода

. Общее решение уравнения Бесселя

. Функции Бесселя полуцелого порядка

. Некоторые дифференциальные уравнения, приводимые к уравнению Бесселя

. Применения

Заключение

Список использованной литературы

**Введение**

Немецкий астроном и математик Фридрих Вильгельм Бессель (1784-1846) родился в небольшом городе Минден на северо-западе Германии в семье мелкого чиновника. Свой жизненный путь Бессель начал торговым служащим. В юности был астрономом-любителем. Серьезно занимался самообразованием. В 1804 самостоятельно вычислил орбиту кометы Галлея, чем заслужил похвалу Г.В. Ольберса. В 1806 стал ассистентом частной обсерватории И.И. Шрётера в Лилиентале. В 1810 был приглашен в Кёнигсберг для организации новой обсерватории, директором которой проработал до последних лет своей жизни. Бессель является одним из основоположников астрометрии Разработал теорию ошибок инструмента и последовательно проводил в жизнь идею о необходимости вносить соответствующие поправки в результаты наблюдений. При обработке результатов наблюдений широко применял различные математические методы, в частности использовал результаты теории вероятностей и метод наименьших квадратов. В честь немецкого математика и астронома было названо дифференциальное уравнение, Бессель подробно исследовал его и показал (в 1824 году), что решения уравнения выражаются через специальный класс функций, получивших название цилиндрических функций или функций Бесселя.

Функции Бесселя в математике - семейство функций, являющихся каноническими решениями дифференциального уравнения Бесселя:

х2 у'' + ху' + (х2 - ν2)у = 0

где ν - произвольное вещественное число, называемое порядком.

Наиболее часто используемые функции Бесселя - функции целых порядков.

Хотя ν и (-ν) порождают одинаковые уравнения, обычно договариваются о том, чтобы им соответствовали разные функции (это делается, например, для того, чтобы функция Бесселя была гладкой по ν). Функции Бесселя впервые были определены швейцарским математиком Даниилом Бернулли, а названы в честь Фридриха Бесселя.

# **1.**

**1. Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах**

Чтобы объяснить происхождение бесселевых функций, рассмотрим уравнение Лапласа в пространстве:

. (1)

Если перейти к цилиндрическим координатам по формулам:

, , ,

то уравнение (1) примет следующий вид:

. (2)

Поставим задачу: найти все такие решения уравнения, которые могут быть представлены в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит только от одного аргумента, то есть найти все решения вида:

,

где , ,  предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми.

Пусть  есть решение упомянутого вида. Подставляя его в (2), получим:

,

откуда (после деления на )

.

Записав это в виде:

,

найдем, что левая часть не зависит от , правая не зависит от , ; следовательно, общая величина этих выражений есть некоторая постоянная . Отсюда:

; ;

; ;

.

В последнем равенстве левая часть не зависит от , правая не зависит от ; следовательно, общая величина этих выражений есть некоторая постоянная . Отсюда:

, ;

, .

Таким образом, , ,  должны удовлетворять линейным дифференциальным уравнениям второго порядка:

, (3)

, ,

из которых второе и третье есть простейшие линейные уравнения с постоянными коэффициентами, а первое является линейным уравнением с переменными коэффициентами нового вида.

Обратно, если , ,  удовлетворяют уравнениям (3), то  есть решение уравнения (2). В самом деле, подставляя  в левую часть (2) и деля затем на , получим:

.

Таким образом, общий вид всех трех решений уравнения (2), которые являются произведением трех функций, каждая из которых зависит от одного аргумента, есть , где , ,  - любые решения уравнений (3) при любом выборе чисел , .

Первое из уравнений (3) в случае ,  называется уравнением Бесселя. Полагая в этом случае , обозначая независимую переменную буквой  (вместо ), а неизвестную функцию - буквой  (вместо ), найдем, что уравнение Бесселя имеет вид:

. (4)

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами играет большую роль в приложениях математики. Функции, ему удовлетворяющие, называются бесселевыми, или цилиндрическими, функциями.

# **2. Бесселевы функции первого рода**

Будем искать решение уравнения Бесселя (4) в виде ряда ( по теореме о разложении в обобщённый степенной ряд):

.

Тогда

,

,

,



.

Следовательно, приходим к требованию



или к бесконечной системе уравнений

 ,

которая распадается на две системы:

 

Первая из них удовлетворится, если взять … Во второй системе  можно взять произвольно; тогда … однозначно определяются (если  не является целым отрицательным числом). Взяв  , ( Г-гамма-функция Эйлера) найдем последовательно:

,

,

,

и в качестве решения уравнения (4) получим ряд:



Этот ряд, формально удовлетворяющий уравнению (4), сходится для всех положительных значений  и, следовательно, является решением уравнения (4) в области  (в случае целого  в области ).

Функция

 (5)

называется бесселевой функцией первого рода с индексом . Она является одним из решений уравнения Бесселя (4). В случае целого неотрицательного индекса  получим:

, (5`)

\*Г-функция является гомоморфным продолжением последовательности факториалов для любого натурального n: Г(n)=(n-1)! и, в частности,

. (5``)

# **3. Общее решение уравнения Бесселя**

В случае нецелого индекса  функции  и  являются решениями уравнения (4). Эти решения линейно независимы, так как начальные члены рядов, изображающих эти функции, имеют коэффициенты, отличные от нуля, и содержат разные степени . Таким образом, в случае нецелого индекса общее решение уравнения Бесселя есть:

. (6)

Если  (целое отрицательное число), то функция, определяемая формулой (5) (учитывая, что  равно нулю для …), принимает вид:

 (5```)

или, после замены индекса суммирования  на ,

, (7)

откуда видно, что  удовлетворяет вместе с  уравнению Бесселя

.

Но формула (6) в случае целого  уже не дает общего решения уравнения (4).

Полагая

 ( - не целое) (8)

и дополняя это определение для  (целое число) формулой:

, (8`)

получим функцию , удовлетворяющую уравнению Бесселя (4) и во всех случаях линейно независимую от  (в случае , где  - целое). Функция  называется бесселевой функцией второго рода с индексом . Общее решение уравнения Бесселя (4) можно записать во всех случаях в виде:

. (9)

# **4. Функции Бесселя полуцелого порядка**

Хотя в общем случае функции Бесселя не выражаются через элементарные функции, в частном случае полуцелого порядка это возможно:

, (10)

Остальные порядки могут быть получены с помощью рекуррентного соотношения:

. (11)

# **5. Некоторые дифференциальные уравнения, приводимые к уравнению Бесселя**

**.** Еще одним хорошо известным уравнением данного класса является *модифицированное уравнение Бесселя*, которое получается из регулярного уравнения Бесселя заменой *x* на −*ix*. Это уравнение имеет вид:

22+v2) =0 (12)

Решение данного уравнения выражается через так называемые *модифицированые функции Бесселя первого и второго рода*:

 (13)

где *Iv*(*x*) и *Kv*(*x*) обозначают модифицированные функции Бесселя, соответственно, первого и второго рода.

**2.** *Дифференциальное уравнение Эйри*, известное в астрономии и физике, записывается в виде:

  (14)

Его также можно свести к уравнению Бесселя. Решение уравнения Эйри выражается через функции Бесселя дробного порядка :

(15)

**.** Дифференциальное уравнение вида

 (16)

отличается от уравнения Бесселя лишь множителем *a*2 перед *x*2 и имеет общее решение в следующем виде:

(17)

**.** Похожее дифференциальное уравнение

 (18)

также сводится к уравнению Бесселя

 (19)

с помощью подстановки

 (20)

Здесь параметр *n*2 обозначает

(21)

В результате, общее решение данного дифференциального уравнения определяется формулой

 (22)

# **6. Применения**

дифференциальный уравнение лаплас бессель

Уравнение Бесселя возникает во время нахождения решений уравнения Лапласа и уравнения Гельмгольца в цилиндрических и сферических координатах. Поэтому функции Бесселя применяются при решении многих задач о распространении волн, статических потенциалах и т. п., например:

· электромагнитные волны <http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%82%D1%80%D0%BE%D0%BC%D0%B0%D0%B3%D0%BD%D0%B8%D1%82%D0%BD%D1%8B%D0%B5\_%D0%B2%D0%BE%D0%BB%D0%BD%D1%8B> в цилиндрическом волноводе <http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%BE%D0%BB%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%BE%D0%B4>;

· теплопроводность <http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%97%D0%B0%D0%BA%D0%BE%D0%BD\_%D1%82%D0%B5%D0%BF%D0%BB%D0%BE%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B8&action=edit&redlink=1> в цилиндрических объектах;

· формы колебания тонкой круглой мембраны

· распределение интенсивности света, дифрагированного на круглом отверстии.

· скорость частиц в цилиндре, заполненном жидкостью и вращающемся вокруг своей оси.

· волновые функции в сферически симметричном потенциальном ящике.

Функции Бесселя применяются и в решении других задач, например, при обработке сигналов.

Специальные функции Бесселя широко используются в решении задач математической физики, в случаях, когда объекты имеют цилиндрическую или сферическую симметрию.

# **Заключение**

Сегодня в качестве математического аппарата во многих отраслях современной прикладной математики, математической физики и технических приложениях широко используются функции Бесселя и цилиндрические функции. Области приложения этих функций крайне разнообразны. Они обеспечивают очень быструю и корректную сходимость решений целого ряда прикладных задач, которые могут быть так или иначе сведены к уравнению Бесселя. Интерес математиков и инженеров к специальным функциям матфизики не угасает.

# **Список использованной литературы:**

1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, Москва 2002

. Балакин А.Б. Лекции по теории функции Бесселя, Казань 2009.

. http://www.math24.ru/bessel-equation.html

. http://ru.wikipedia.org/wiki/Функции\_Бесселя

5. Курант Р. Гильберт Д. Методы математической физики т.1 <http://page-book.ru/search/?sb=4&q=%D0%9A%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%82%20%D0%A0.%20%D0%93%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D0%B1%D0%B5%D1%80%D1%82%20%D0%94.%20%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D1%8B%20%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B9%20%D1%84%D0%B8%D0%B7%D0%B8%D0%BA%D0%B8%20%D1%82.1> <http://page-book.ru/i46486>

. И.Г. Араманович, В.И. Левин. Уравнения математической физики. 1969.