Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

(ФГБОУ ВПО «АмГУ»)

Факультет Математики и информатики

Кафедра Математического анализа и моделирования

Специальность 010101.65 - Математика

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ

И.о. зав. каф.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Н.Н. Максимова

«\_\_\_\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2013

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

на тему: Метод конформных отображений в механике сплошных сред

Исполнитель

студент группы 851 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ О.С. Красноперова

Руководитель дипломной работы

доцент \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ В.П. Нейман

Нормоконтроль

доцент \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ В.А. Труфанов

Резензент

профессор, д. ф.-м. н. \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ С.В. Ланкин

Благовещенск 2013

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

(ФГБОУ ВПО «АмГУ»)

Факультет Математики и информатики

Кафедра Математического анализа и моделирования

УТВЕРЖДАЮ

И.О.Зав. Кафедрой

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Н.Н. Максимова

«\_\_\_\_\_\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2013 г.

З А Д А Н И Е

К выпускной квалификационной работе студента Красноперовой Ольги Сергеевны

1. Тема выпускной квалификационной работы: Метод конформных отображений в механике сплошных сред

. Срок сдачи студентом законченной работы 13 июня 2013.

. Исходные данные к выпускной квалификационной работе: отчет по преддипломной практике, литературные источники.

. Содержание выпускной квалификационной работы (перечень подлежащих разработке вопросов): исследование метода конформных отображений в механике сплошных сред, проведение расчетов и систематизация материалов.

. Перечень материалов приложения: -

. Консультанты по выпускной квалификационной работе: -

. Дата выдачи задания 11. 02. 2013

Руководитель выпускной квалификационной работы: Нейман Венера Петровна, доцент.

Задание принял к исполнению 18.02.2013 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

РЕФЕРАТ

Дипломная работа содержит 77 с., 28 рисунков, 40 источников

КОМПЛЕКСНАЯ ПЛОСКОСТЬ, КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ, КОНФОРМНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ГОЛОМОРФНОСТЬ, ОДНОЛИСТНОСТЬ, МНОГОЛИСТНОСТЬ, ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ, ФУНКЦИЯ ТОКА, ЛИНИИ ТОКА, ПОТЕНЦИАЛ СКОРОСТИ, КОМПЛЕКСНАЯ СКОРОСТЬ, СПЛОШНЫЕ СРЕДЫ, КАВИТАЦИЯ, КОМПЛЕКСНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ, ФУНКЦИЯ ЖУКОВСКОГО

Объектом исследования данной работы является применение конформных отображений в механике сплошных сред.

Целью дипломной работы является изучение и исследование метода конформных отображений в механике сплошных сред.

Дипломная работа посвящена исследованию метода конформных отображений в механике сплошных сред. Рассматриваются основные принципы конформных отображений функций комплексного переменного, их гидродинамические аналогии и интерпретации. Рассматриваются конкретные классические примеры конформных отображений для различных функций комплексного переменного. Подробно рассмотрены многочисленные примеры применения метода конформных отображений в механике сплошных сред.

Много внимания уделяется историческим сведениям и вкладу отечественных учёных в развитие метода конформных отображений.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

. Общие принципы теории конформных отображений

1.1 Понятие конформного отображения и его основные свойства

2. Классические примеры конформных отображений

.1 Простейшие примеры

.2 Конформное отображение степенной функцией

.3 Линейная функция

.4 Дробно-линейная функция

. Метод конформных отображений в механике сплошных сред

.1 Гидродинамическая аналогия

.1.1 Линии тока в механике сплошных сред

.1.2 Функция тока

.1.3 Условие потенциальности поля скоростей

.1.4. Комплексный потенциал в механике сплошных сред

.2 О роли функции Жуковского в механике сплошных сред

.2.1 Первая научная статья об использовании функции Жуковского

.2.2 Примеры конформных отображений с функцией Жуковского

3.2.3 Достижения с помощью функции Жуковского

.3 Метод конформных отображений в гидродинамике

.3.1 Об обтекании произвольного контура

.3.2 Обтекание эллиптического цилиндра

.3.3 Обтекание некоторых кривых третьего порядка

.3.4 Течения на многолистных поверхностях

.3.5 Давление при обтекании со срывом струй и с циркуляцией

.3.6 Обтекание с кавитацией7

.4 Метод конформных отображений в аэродинамике

.4.1 Обтекание профилей Жуковского

.5 Метод конформных отображений в теории фильтрации

.5.1 Поток, искаженный прямолинейной щелью

.5.2 Поток, искаженный непроницаемой заслонкой

.5.3 Построение течений в прерывно неоднородных средах

. Примеры использования метода конформных отображений в механике сплошных сред в XXI веке

4.1 Моделирование некоторых фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями

.2 О режиме грунтовых вод при фильтрации под гидротехническими сооружениями

.3 О течении жидкости из оросителей

4.4 Об интегрировании в замкнутой форме некоторых дифференциальных уравнений класса Фукса, связанных с конформным отображением круговых пятиугольников с разрезом

4.5 Построение подземного контура гидротехнического сооружения с участками постоянной скорости обтекания

.6 Гидродинамика скручивания наносвитка

.7 К теории индукционных явнополюсных машин

.8 Численный расчет распространения импульсного магнитного поля через массивный ферромагнитный экран

.9 Об однозначной определенности выпуклых многогранных областей в трехмерном евклидовом пространстве относительными конформными модулями граничных конденсаторов

Заключение

Библиографический список

ВВЕДЕНИЕ

Метод конформных отображений является одним из основных методов теории функций комплексного переменного. Этот метод не является новым: впервые этот термин появился в картографической работе Ф.И. Шуберта, академика Российской АН (1788 - 1789 гг.). Независимо от него этот термин ввёл Гаусс (1843 г.).

Первое применение конформного отображения стереографической проекции на плоскость дал Птолемей (около 150 г.). Далее оно встречается у Эйлера в 1777 г., и его Эйлер назвал « подобное в малом».

Лагранж дал теорию конформного отображения поверхностей вращения на плоскость (1779 г.), но только Гаусс дал общую теорию конформных отображений, исходя из теории функций комплексного переменного (1822 г.).

Особая роль в истории конформных отображений принадлежит Риману: он методами физики доказал теорему о том, что все односвязные области расширенной комплексной плоскости с непустыми границами конформно эквивалентны, т.е. каждая из областей этого типа может быть взаимно однозначно и конформно отображена на любую область этого типа (1851 г.). Строгое математическое обоснование теоремы Римана дали в 1900 г. Д. Гильберт, А.Пуанкаре, К. Каратеодори.

Велика роль Римана в разработке методов конформных отображений, его геометрический подход и построение римановых поверхностей привлекли всеобщее внимание к методам ТФКП.

Можно отдельно подчеркнуть вклад отечественных ученых в развитие метода конформных отображений.

Жуковский Н.Е. и Чаплыгин С.А. в аэрогидромеханике реальную пространственную задачу свели к плоской задаче и, используя конформные отображения, продемонстрировали исключительную эффективность методов ТФКП. Особенно важна единственность решения этой задачи. Эти идеи остаются основополагающими до сих пор.

Лаврентьев М.А. в 1928 - 1935 гг. исследовал топологические свойства конформных отображений и выделил широкий класс отображений, топологически эквивалентных конформным. Так возникла теория квазиконформных отображений, которая явилась источником новых задач и исследований.

Волковыский Л.И. провёл цикл работ по изучению квазиконформных отображений на римановых поверхностях.

Лаврентьев М.А. разработал вариационные методы теории конформных отображений. В 1938г. с помощью этих методов он получил классические результаты по теории волн.

Лаврентьев М.А. и Келдыш М.В. разработали методами ТФКП теорию движения корабля на подводных крыльях.

Келдыш М.В. в 1939 г. в статье «Конформные отображения многосвязных областей на канонические области» дал важный материал по актуальным вопросам ТФКП.

Канторович Л.В. разработал метод последовательных приближений для конформного отображения круга на односвязную область.

Ведерников В.В. применил метод конформных отображений при расчёте задач фильтрации.

Уже более двух столетий продолжается развитие и использование метода конформных отображений, что доказывает неослабевающую актуальность этого метода.

Целью дипломной работы является изучение и исследование метода конформных отображений в механике сплошных сред.

Дипломная работа состоит из четырёх глав. В первой главе рассматриваются основные принципы конформных отображений, даётся краткое теоретическое введение.

Во второй главе рассматриваются конкретные классические примеры применения конформных отображений к различным функциям комплексного переменного.

В третьей главе рассматриваются многочисленные примеры использования метода конформных отображений в механике сплошных сред.

В четвёртой главе рассмотрены современные примеры использования метода конформных отображений в механике сплошных сред.

1. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ТЕОРИИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

.1 Понятие конформного отображения и его основные свойства

Взаимно однозначное отображение, обладающее свойством сохранения углов по величине и направлению и свойством постоянства растяжений малых окрестностей отображенных точек, называется конформным отображением.

Для обеспечения взаимной однозначности отражения выделяют области однолистности функции. Область D называется областью однолистности функции f(z), если .

Основные свойства конформных отображений:

) постоянство растяжений. Линейное в точке одинаково для всех кривых, проходящих через эту точку, и равно ;

) сохранение углов. Все кривые в точке поворачиваются на одинаковый угол, равный .

Функция отображает точки z- плоскости (или римановой поверхности). В каждой точке z, такой что f(z) аналитична ( т.е. однозначно определена и дифференцируема в некоторой окрестности этой точки) и, отображение конформно, т.е. угол между двумя кривыми, проходящими через точку z, переходит в равный по величине и направлено отсчета угол между двумя соответствующими кривыми в плоскости.

Бесконечно малый треугольник около такой точки z отображается в подобный бесконечно малый треугольник - плоскости; каждая сторона треугольника растягивается в соотношении  и поворачивается на угол. Коэффициент искажения (локальное отношение малых площадей) при отображении определяется якобианом отображения



в каждой точке z, где отображение конформно.

Конформное отображение преобразует линии в семейство ортогональных траекторий в w- плоскости.

Область z- плоскости, отображающаяся на всю w-плоскость функцией f(z), называется фундаментальной областью функции f(z).

Точки, где, называются критическими точками отображения .

Отображение, которое сохраняет величину, но не направление отсчета угла между двумя кривыми, называется изогональным или конформным отображением второго рода.

Отображение конформно в бесконечно удаленной точке, если функция  конформно отображает начало в - плоскость.

Две кривые пересекаются под углом в точке , если преобразование  переводит их в две кривые, пересекающиеся под углом в точке.

Аналогично,  конформно отображает точку конформно в точку  [31, с. 274].

. КЛАССИЧЕСКИЕ ПРИМЕРЫ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

2.1 Простейшие примеры

Пример 1. С помощью функции отобразить на плоскость прямую .

Решение.

Находим



Преобразуем прямую.Получаем.

Таким образом,

, 

Подставляем  в полученные уравнения:





и получаем

 (1)

 (2)

Из полученных уравнений исключаем х.

Из уравнения (1) находим х и получаем

 (3)

Подставляем (3) в уравнение (2):



получаем

 (4)

Изобразим полученные линии на рисунке 1.



а) б)

Рисунок 1  Конформное отображение прямой функцией 

Ответ: Итак, прямая , расположенная в плоскости хОу , конформно отобразилась в кривую (параболу)  расположенную в плоскости 

Пример 2. Найти угол поворота и коэффициент искажения масштаба в точке  при отображении :

, .

Решение.

При отображении с помощью функции угол поворота есть ,а коэффициент искажения масштаба в точке равен .

Находим



В точке имеем



(сжатие).

Ответ: (сжатие).

Пример 3. Найти угол поворота и коэффициент искажения масштаба в точке  при отображении :

, .

Решение.

При отображении с помощью функции угол поворота есть,а коэффициент искажения масштаба в точке равен



Находим



В точке  имеем

 (растяжение).



Ответ: (растяжение).

Пример 4. Найти точки плоскости, в которых равен 1 коэффициент искажения масштаба при отображении:

.

Решение.

Коэффициент искажения масштаба в точке равен

.

Находим производную

.

По условию коэффициент искажения масштаба должен быть равен 1.

Следовательно,

Ответ: .

Пример 5. Найти точки плоскости, в которых равен 1 коэффициент искажения масштаба при отображении:

.

Решение.

Коэффициент искажения масштаба в точке равен

.

Находим производную

.

По условию коэффициент искажения масштаба должен быть равен 1.

Следовательно,

.

Ответ: .

Пример 6. Найти точки плоскости, в которых равен нулю угол поворота при отображении:

.

Решение.

При отображении с помощью функции  угол поворота есть

 где .

Находим



Так как ни при одном значении z, кроме z=0, то заданное отображении конформно в плоскости.



Ответ: Rez=0.

Пример 7. Найти точки плоскости, в которых равен нулю угол поворота при отображении:

.

Решение.

При отображении с помощью функции  угол поворота есть

 где .

Находим



Подставляем



.

Ответ: .

Пример 8. Показать, что угол между прямыми  и  не изменится при отображении .

Решение.

Находим





Таким образом,





Из полученных уравнений и уравнения исключаем у:



Теперь решаем для прямой :

 (5)

 (6)

Подставляем  в уравнения (5) и (6) и получаем

 ,

где любое.

Проиллюстрируем полученное решение на рисунке 2,б.



Рисунок 2 - Конформное отображение прямых и  функции



Тогда



Ответ: ,.

2.2 Линейная функция

Найти функцию, отображающую треугольник с вершинами (0;1;i) на подобный ему треугольник  с вершинами (0;2;1+i) [35, c. 9].

Решение. Заданные треугольники подобны, поэтому задача может быть решена с помощью линейного преобразования , где - произвольные комплексные числа

Первый способ.



Рисунок 3 - Подобные треугольники

Из рисунка 3 следует, что треугольник OAB переходит в треугольник OCD с помощью следующих преобразований:

1) поворот плоскости z вокруг начала координат на угол  с растяжением враза, что соответствует преобразованию

.

2) параллельный перенос плоскости, смещающий точку О и точку D на вектор b=1+i, т.е. преобразование .

Окончательно получаем

.

Второй способ.

По условию задачи точки должны перейти в точки  соответственно.

Из



следует

.

2.3 Конформное отображение степенной функцией

Степенная функция

 (7)

принадлежит к неоднолистным (многолистным) или не взаимно однозначным функциям.

Найдем область однолистности функции (7), однозначность, поскольку обратная функция

 (8)

имеет n различных значений в любой фиксированной точке.

Однолистность нарушается там, где одному значению функции  соответствуют несколько значений аргумента. Например, если

.

Отсюда, полагая  ,на основании правила вычисления корня находим, что

. (9)

При  и соответственно получаем

,

т.е. однолистность нарушается в точке , имеющей тот же модуль, что и, но аргумент, отличающийся на  (точки A, B на рисунке 4,а).

Следовательно, однолистность имеет место для всех точек  таких, что, т.е. для всех точек, лежащих внутри угла с центром в точке О раствора  (рисунок 4,а).

Если положить , , то из соотношения (7) имеем

, (10)

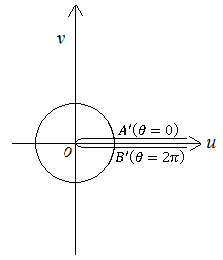
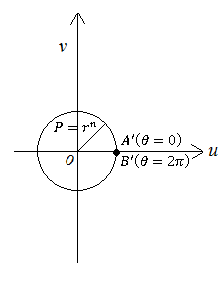
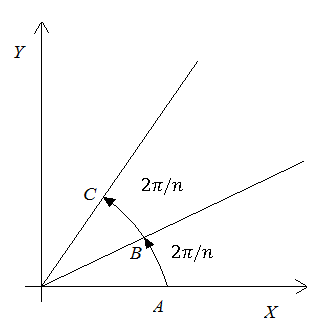


Рисунок 4 - Иллюстрация неоднолистности степенной функции

откуда видно, что внутренности угла  соответствует вся плоскость  с разрезом по действительной полуоси (при движении точки вдоль дуги АВ радиуса угол  изменяется от 0 до  , и точка совершает полный обход вокруг начала координат вдоль окружности радиуса, так как угол изменяется от 0 до ).

На сторонах угла АОВ однолистность нарушается, и точки А, В с одинаковым модулем перейдут в одну и ту же точку, лежащую на действительной оси (точки  на рисунке 4 б). Если же в плоскости провести разрез вдоль положительной части действительной оси (рисунок 4 в), то, поскольку на верхнем берегу разреза  , а на нижнем , преобразование (9) станет однолистным и на сторонах угла АОВ (точки  перестанут совпадать). Итак, преобразование (7) устанавливает взаимно однозначное соответствие между внутренностью раствора  (включая стороны) и всей плоскостью, разрезанной вдоль положительной части действительной оси.

Но функция определена и вне угла АОВ, причем следующему углу ВОС с тем же раствором  вновь соответствует вся плоскость (по формулам (10)), которая, однако, занята образами точек угла АОВ. Чтобы преодолеть это затруднение, поступим следующим образом. Возьмем экземпляров плоскостей  ,пронумеруем их и разрежем каждый экземпляр вдоль положительной части действительной оси. Далее склеим нижний берег разреза на плоскости 2 с верхним берегом разреза на плоскости 3 и т.д. и, наконец, нижний берег разреза на плоскости  склеим с верхним берегом разреза плоскости 1. Теперь каждому из  углов раствора  (BOC,…) соответствует свой лист плоскости  , разрезанной вдоль полуоси . В результате преобразование при любом станет однолистным на построенной n-листной поверхности, называемой римановой поверхностью функции.

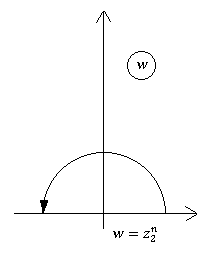
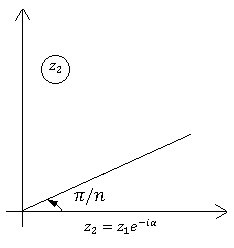
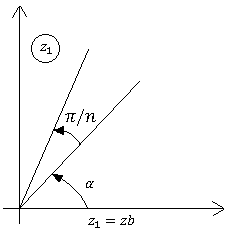
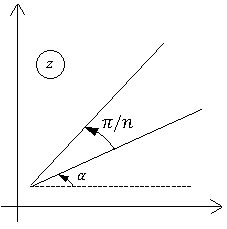
Обратим теперь внимание, что функция (7) отображает внутренность угла  на всю плоскость с разрезом, (на угол), т.е. увеличивает угол с вершиной в нуле в раз. Следовательно, преобразование (7) не конформно в нуле. Это можно было ожидать, поскольку производная  при и  .

Преобразование (7) позволяет отображать углы разного раствора и различным образом расположенного на плоскости друг на друга.

Проиллюстрируем это на примере, в котором требуется конформно отобразить угол раствора  с вершиной в точке на верхнюю полуплоскость. Последовательность решения этой задачи показана на рисунке 5, а)  г).

Из рисунка следует, что функция, реализующая требуемое отображение, имеет следующий вид:

. (11)



а) б) в) г)

Рисунок 5  Последовательность конформного отображения

2.4 Дробно-линейная функция

Найти функцию, конформно отображающую единичный круг сам на себя так, чтобы заданная внутренняя точка  перешла в центр круга.

Для решения задачи воспользуемся дробно-линейной функцией. При этом точка и точка,симметричная ей относительно окружности , перейдут в точки, симметричные относительно окружности . Но поскольку точка, симметричная центру окружности, есть бесконечно удаленная точка, точка  должна перейти в точку ,то точка должна перейти в точку . Следовательно, искомая дробно-линейная функция имеет вид:

. (12)

Так как , то (12) можно переписать в виде

 (13)

Для того чтобы при отображении (13) окружность перешла также в окружность  единичного радиуса, должно выполняться условие

.

Отсюда , где -произвольное действительно число, и решение этой задачи получаем в виде

.

Получено решение с точностью до одного произвольного параметра , который определяет поворот окружности  вокруг центра. Задание значения аргумента производной функции  в точке полностью определяет функцию  [35, с. 17].

3. МЕТОД КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД

3.1 Гидродинамическая аналогия

Рассмотрим установившееся плоскопараллельное течение жидкости. Это означает, что векторы скорости  этого течения не зависят от времени и одинаковы во всех точках каждого перпендикуляра к некоторой плоскости, которую мы примем за плоскость комплексного переменного , рисунок 6.



Рисунок 6 - Плоскопараллельное течение жидкости

Таким образом, установившееся течение полностью описывается плоским векторным полем скоростей, поэтому для плоскопараллельных течений можно использовать математический аппарат функции комплексного переменного , тогда функцию скорости можно записать в комплексном виде

. (14)

Предположим, что в окрестности некоторой точки функции и обладают непрерывными частными производными. Кроме того, будем считать, что в этой окрестности векторное поле  (14) безвихревое, т.е.

, (15)

и соленоидально, т.е.

, (16)

(равенства (15) и (16) одновременно справедливы для всех точек окрестности).

Из условия (15) следует, что в окрестности точки дифференциальная форма  является полным дифференциалом некоторой функции , которую называют потенциальной функцией поля. Таким образом, имеем



  (17)

или, в векторной записи, .

Из условия соленоидальности (16) следует, что и форма является в случае несжимаемой жидкости полным дифференциалом некоторой функции  так что имеем

, . (18)

На линии уровня функций  имеем , т.е., откуда видно, что эта линия является векторной линией поля,т.е. линией тока (траекторией частиц жидкости). Поэтому  называют функцией тока.

Построим теперь комплексную функцию

, (19)

которую называют комплексным потенциалом поля. Сравнивая соотношения (17) и (18), мы видим, что в плоскопараллельном поле выполняются условия:

, . (20)

Они совпадают с условиями комплексной дифференцируемости и, следовательно, показывают, что комплексный потенциал f является функцией, голоморфной в точке .

В векторном анализе доказывается и обратное, т.е любую голоморфную в точке функцию  можно рассматривать как комплексный потенциал векторного поля , потенциального и соленоидального в окрестности  , которое можно трактовать как поле скоростей некоторого течения жидкости.

Таким образом, голоморфность функции  означает, что эту функцию можно трактовать как комплексный потенциал плоскопараллельного установившегося течения жидкости, потенциального и соленоидального.

Очевиден гидродинамический смысл производной

, (21)

т.е. производная комплексного потенциала представляет собой вектор, комплексно сопряженный вектору скорости плоскопараллельного течения [38, с. 40].

3.1.1 Линии тока в механике сплошных сред

Линией тока называют линию, в каждой точке которой касательная к ней совпадает по направлению со скоростью частицы жидкости или газа в данный момент времени.

Свойства линии тока:

1) через каждую точку пространства проходит только одна линия тока, т.е. линии тока не пересекаются;

2) для стационарного движения линия тока является траекторией частиц, т.е. частица не может перейти с одной линии на другую линию [12, c. 30].



Рисунок 7 - Линия тока

Простейшим случаем движений в механике сплошных сред являются плоскопараллельные течения. Для их описания достаточно 2-х переменных.

Согласно определению линии тока, векторное произведение

,

откуда следует, что , тогда получим дифференциальное уравнение линий тока

. (22)

3.1.2 Функция тока

Из уравнения (14) следует

. (23)

Выбирая интегрирующий множитель для уравнения (23), получим полный дифференциал некоторой функции  в виде

, (24)

откуда следует, что

.

Из уравнения (24) следует формула

, (25)

т.е. для различных значений констант, имеем различные линии тока, т.е. уравнение (25) дает семейство линий тока, поэтому функцию  называют функцией тока.

.1.3 Условие потенциальности поля скоростей

Рассмотрим безвихревое поле, т.е. поле скоростей, в котором нет вихрей, т.е.

.

Но - это векторное произведение, которое равно нулю для коллинеарных векторов, т.е.

.

Это означает, что  или ,где - скалярный потенциал,

т.е. ,



Если функция , то она выражает семейство эквипотенциалей, т.е. во всех точках одной и той же эквипотенциали одинаковые значения функции .

Семейство кривых , называемых эквипотенциалями, и семейство кривых ,называемых линиями тока, являются взаимно ортогональными, т.е

, (26)

так как



Эти два семейства равноправны. Следовательно, линии тока и эквипотенциали математически взаимнозаменяемы. Это широко используется при изучении и построении течений.

3.1.4 Комплексный потенциал в механике сплошных сред

Связь функций  и  осуществляется условиями Коши-Римана и указывает, что и можно рассматривать как действительную и мнимую части аналитической функции w от комплексного переменного :

, (27)

где .

Функция является комплексным потенциалом , а ,- соответственно его действительной и мнимой частями. Производная аналитической функции ( не зависящая в силу условий Коши-Римана от направления изменения  ) может быть записана в виде [12, c. 71].

. (28)

Выражение можно рассматривать как вектор скорости, для которого и соответственно проекции на оси х и у. Выражение,  которое является сопряженной функцией  ,есть зеркальное отображение вектора скорости по отношению к оси, параллельной оси х (рисунок 8). Выражение (28) называется комплексной скоростью. По модулю комплексная скорость равняется модулю вектора скорости, т.е.



Рисунок 8 - Зеркальное отображение вектора скорости

. (29)

3.2 О роли функции Жуковского в механике сплошных сред

.2.1 Первая научная статья об использовании функции Жуковского

Впервые задача об обтекании шпунта рассматривалась Н.Е. Жуковским в 1950 году в статье «Просачивание воды через плотины», в которой видоизмененный им метод Кирхгофа в теории струй был использован для решения задач фильтрации со свободной поверхностью. Здесь была введена специальная аналитическая функция, впоследствии получившая широкое применение в механике сплошных сред, с помощью которой Н.Е. Жуковским дано исследование задачи об обтекании шпунта. С тех пор эта функция и шпунт носят имя Жуковского. Работа открыла возможность математического моделирования задач со свободной поверхностью и положила начало исследованиям указанного класса фильтрационных течений.

Решение задачи Жуковского об обтекании шпунта дается в том случае, когда на некоторой глубине под шпунтом залегает горизонтальный пласт, состоящий из непроницаемого и хорошо проницаемого участков, и при наличии инфильтрации на свободную поверхность [4, c. 34].

3.2.2 Примеры конформных отображений функцией Жуковского

Рассмотрим примеры на конформное отображение линий с помощью функции Жуковского.

Пример 1. Пусть дана линия, удовлетворяющая условию ,т.е . Функция Жуковского имеет вид . Подставляя в функцию Жуковского , мы получим

.

Выделив действительную и мнимую части, имеем

,

где

, .

Используя условие , получим

, ,

, . (30)

Из (30) выразим x и y, подставим в уравнение , получим



конформный отображение сплошной среда



а) б)

Рисунок 9 - Конформное отображение окружности радиуса r = 2 функцией Жуковского

.

Пример 2. Рассмотрим пример конформного отображения функцией Жуковского дуги окружности радиуса r =1, заключенной между углами.

Используем тригонометрическую форму комплексного числа . Подставляем в функцию Жуковского это выражение, получим

.

Учтём, что радиус r = 1, получим ,

т.е .

Вычислим значения, соответствующие в конформном отображении точкам , .

Определяем

.



а) б)

Рисунок 10 - Конформное отображение функцией Жуковского дуги радиуса r = 1, заключенной между углами

Таким образом, как показано на рисунке 10 , дуга, заключенная между углами , конформно отобразится на прямую в интервале  с помощью функции Жуковского.

3.2.3 Достижения с помощью функции Жуковского

Жуковский Николай Егорович (1847-1921), русский ученый, заложил основы современных авиационных научных исследований и инженерного образования в России, член-корреспондент РАН (1917; член-корреспондент Петербургской АН с 1894). Участник создания Аэродинамического института в Кучино, под Москвой (1904). Им были организованы Центральный аэрогидродинамический институт (1918 г.) и Институт инженеров Красного Воздушного Флота (1920 г.), ставший впоследствии всемирно признанным военным авиационным ВУЗом - ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского [20].

Исследования по аэродинамике и авиации.

В работах Жуковского были развиты все основные идеи, на которых строится современная авиационная наука. В 1890 было опубликовано первое теоретическое исследование Жуковского по авиации - «К теории летания». За ним последовал ряд работ по авиации и динамике полета, из которых особенно важное значение имела работа «О парении птиц» (1891). Работы Жуковского о различных формах траекторий полета стали теоретической базой фигур высшего пилотажа. В своей работе «О присоединенных вихрях», представленной в виде доклада в Московском математическом обществе в 1905, Жуковский вывел формулу для подъемной силы, ставшую основой для всех аэродинамических расчетов самолетов. В период 1912-1918 появился ряд работ Жуковского по вихревой теории гребного винта, в которых он, опираясь на разработанную им теорию крыла, дал теорию работы воздушного винта. На основе этой теории проектируются и строятся воздушные винты современных летательных аппаратов.

Теоретическая аэродинамика.

Основные результаты Жуковского в области теоретической аэродинамики: теорема о подъемной силе; гипотеза Жуковского-Чаплыгина об определении циркуляции; метод округления Жуковского и открытие трех серий теоретических профилей; строгая математическая оценка влияния толщины и изогнутости профиля на величину его подъемной силы; разработка вихревой теории воздушного винта. Эти достижения - фундамент современной аэродинамической науки.

Работы по гидродинамике

В 1882 и 1886 в связи с выдвинутой тогда технической проблемой создания судов с реактивными движителями Жуковский дал методы расчета воздействия на сосуд втекающей в него и вытекающей из него жидкости. К работам по гидромеханике относится исследование по теории качки морских судов. Важным вопросам гидродинамики была посвящена магистерская диссертация Жуковского «Кинематика жидкого тела» (1876), в которой он предложил геометрическую теорию движения изменяемой системы. Некоторые результаты обширного исследования по гидромеханике «О движении твердого тела, имеющего полости, заполненные капельной жидкостью» (1885) были позднее использованы при решении космогонических проблем. В 1886 Жуковский создал свой курс «Лекции по гидродинамике», оказавший большое влияние на развитие этой области механики в России.

Работы по гидравлике.

Характерная для Жуковского практическая направленность научного творчества особенно отчетливо проявилась в его классических исследованиях по гидравлике. Этот цикл был связан с важнейшей технической проблемой водоснабжения крупных городов. Исследования Жуковского по фильтрации впоследствии были с большим успехом применены к вопросам механики добычи нефти. Теоретические и экспериментальные исследования сложного явления гидравлического удара позволили Жуковскому дать законченную теорию гидравлического тарана. Работы по механике неизменяемых систем.

Ряд исследований Жуковского был посвящен теории движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, причем эти исследования были замечательны примененным в них геометрическим методом. Много внимания Жуковский уделил проблеме устойчивости движения. Ей была посвящена его докторская диссертация «О прочности движения» (1879, издана в 1882), послужившая основой для исследования устойчивости аэропланов в воздухе. Несколько работ было посвящено теории гироскопов.

Работы по математике и астрономии

Жуковский выполнил ряд исследований по уравнениям в частных производных и по приближенному интегрированию уравнений. Он первым стал широко применять в гидро- и аэродинамике методы теории функций комплексной переменной. В статьях по теоретической астрономии Жуковский затрагивал теорию кометных хвостов, дал простой способ определения элементов планетных орбит.

Методика, практическая направленность исследований

Во всех областях своей многогранной деятельности Жуковский пролагал новые пути, постоянно указывая на необходимость сочетания геометрического и аналитического методов исследования явлений природы. При этом характернейшей чертой научного творчества Жуковского являлась практическая направленность теоретических исследований [17].

3.3 Метод конформных отображений в гидродинамике

Метод конформного преобразования плоскости , в которой происходит данное движение жидкости, позволяет строить течения с другими граничными условиями в плоскостях ..., что значительно расширяет круг задач плоских течений. В качестве исходного движения берутся произвольные течения вне окружности или полуплоскости.

3.3.1 Об обтекании произвольного контура

Если известно течение в плоскости , заданное комплексным потенциалом

 (31)

то конформное преобразование плоскости в плоскость 

 (32)

позволяет построить новое течение, комплексный потенциал которого будет вида

 (33)

Так как при конформном отображении линии тока переходят в линии тока, то непроницаемые стенки, ограничивающие течение (31), перейдут в новые границы, ограничивающие течение (33). Далее , так как при конформном преобразовании сохраняются особые точки течения , (33) будет комплексным потенциалом течения, описывающим обтекание новых границ старым потоком, который задаётся особыми точками (31).

В ряде случаев преобразование плоскости в плоскость  задаётся функцией, обратной (32):

 (32.1)

где F осуществляет конформное преобразование плоскости  в плоскость .

Совокупность соотношений



можно рассматривать как параметрическое задание течения (33).

Если в качестве (31) выбрать обтекание окружности  и если (32) или (32.1) осуществляет преобразование окружности в какой-либо контур, то обтекание последнего течением, обладающим теми же особенностями, что и течение, обтекающее окружность, будет записываться комплексным потенциалом

 (34)

Так как при конформном преобразовании из окружности можно получить любой контур , то (34) представляет собой комплексный потенциал, который описывает обтекание произвольным потоком произвольного контура , где осуществляет конформное преобразование плоскости в плоскость , при котором заданный контур переходит в окружность.

3.3.2 Обтекание эллиптического цилиндра

а) Продольное обтекание. Для того чтобы найти комплексный потенциал



где , и построить картину течения при обтекании цилиндра, рисунок 11.

  (35)

Установившимся поступательным потоком, скорость которого в бесконечности направлена по большой оси цилиндра, попытаемся найти конформное преобразование плоскости  в плоскость новой комплексной переменной 





Рисунок 11  Течение при обтекании цилиндра

чтобы контур эллиптического цилиндра в плоскости  перешел в контур круга некоторого радиуса в плоскости  с центром в точке  и чтобы точка соответствовала точке ; при этом внешняя часть плоскости  по отношению к цилиндру (35) будет соответствовать внешней же части плоскости  по отношению к круговому цилиндру. Построив комплексный потенциал  течения при обтекании кругового цилиндра в плоскости и совершив обратный переход [24, c. 267]



получим искомый потенциал  течения в плоскости .

Прежде всего проведем преобразование подобия



где  есть линейный эксцентриситет данного эллипса.

Тогда эллипсу (35) будет соответствовать в плоскости  эллипс

 (36)

где 

линейный эксцентриситет которого равен 1. При этом, очевидно, точкам  и  будут соответствовать точки  и .

Из теории конформных преобразований известно, что подстановка



преобразует эллипс на плоскости 

 (37)

с эксцентриситетом 1 в окружность на плоскости  радиуса  с центром в ; причем если , то внешняя часть эллипса ,(37) переходит во внешнюю же часть окружности, так что сохранится соответствие точек и . Подберём радиус  так, чтобы отожествить эллипсы (36) и (37):



Складывая, находим



Таким образом, искомое преобразование имеет вид

 (38)

Взяв выражение комплексного потенциала течения в плоскости  при обтекании кругового цилиндра потоком, скорость которого в бесконечности  параллельна вещественной оси, т.е.

 (39)

скорость  при  должны еще выбрать так, чтобы получить в плоскости  при  скорость  ; кроме того, надлежит проверить допущенную неявно параллельность в бесконечности течений в плоскости  и  .

Преобразование, обратное преобразованию (38), будет неоднозначно



но требование  делает его однозначным. В самом деле, для точки  имеем



и так как эта точка должна лежать на окружности радиуса  ,то мы должны взять верхний знак

 (40)

При этом мы подразумеваем под то значение этого корня, которое при  положительно.

Комплексный потенциал (39) вследствие (40) преобразуется к виду



Вычисляя комплексную скорость, имеем



откуда видно, что при  , а, следовательно, и , вещественно и притом



Таким образом, искомый комплексный потенциал при обтекании эллиптического цилиндра (35) поступательным потоком, параллельным большой оси цилиндра, будет иметь вид

 (41)

Легко проверить, что при  после раскрытия неопределенности вида  получим найденное ранее выражение кругового цилиндра.

б) Поперечное обтекание. Если скорость потока в бесконечности направлена в положительную сторону оси  (рисунок 12), то отобразив преобразование

 т.е.



внешность эллипса



плоскости  на внешность круга



плоскости  , мы должны только для комплексного потенциала  течения в плоскости  взять вместо формулы (39) формулу



которую получаем из выведенной общей формулы  учитывая, что в бесконечно удаленных точках плоскости скорость течения направлена в положительную сторону оси  , имея некоторую величину . Возвращаясь к переменной  по формуле



получаем



откуда найдется комплексная скорость течения в плоскости 





Рисунок 12  Поперечное обтекание

Так как при должно быть , то получаем



Таким образом, искомое выражение для комплексного потенциала при поперечном обтекании эллиптического цилиндра имеет вид [24, c. 270]



в) Косое обтекание. Если скорость в бесконечности  составляет некоторый угол  с продольной осью эллипса



то, разлагая вектор  на составляющие

. (42)

И рассматривая косое обтекание как результат сложения продольного и поперечного обтекания со скоростями  и  в бесконечно удаленных точках, мы можем комплексный потенциал такого результирующего течения представить как сумму соответствующих потенциалов (42) и (43), т.е.

. (43)

Это возможно вследствие линейности уравнения Лапласа, которому удовлетворяет комплексный потенциал 

При отсутствии циркуляции действующие на цилиндр силы при косом обтекании приводятся к одной паре, момент которой может быть получен применением формулы,



где  есть коэффициент при  в разложении  в ряд по степеням . Но в окрестности бесконечно удалённой точки



следовательно,



Тогда



следовательно,



Заменяя  и  их выражениями

получаем окончательно, что вращательный момент реакции исчезает при продольном  и при поперечном  обтекании эллиптического цилиндра [24, c. 271].

3.3.3 Обтекание некоторых кривых третьего порядка

Используем общие положения об обтекании произвольного контура в следующем конкретном случае. Пусть течение описывается соотношением [12, c. 119]

 (44)

где



Конформное преобразование плоскости  в плоскость  (44) переводит прямые плоскости  параллельные оси х ,в кривые третьего порядка плоскости, . Действительно, из (44) следует



откуда (рисунок 13) при 

 (45)



а) б)

Рисунок 13 - Кривые третьего порядка

Так как комплексный потенциал (44) в плоскости z определяет обтекание прямой , то в плоскости  он будет описывать обтекание кривых третьего порядка. Через этот потенциал записывается в виде

 (44.1)

Если , то из (45) следует, что (44.1) определяет обтекание полуплоскости, ограниченной прямой  и окружностью, уравнение которой  (рисунок 14).



Рисунок 14 - Обтекание полуплоскости при а=0

3.3.4 Течения на многолистных поверхностях

Преобразование плоскости z в плоскость  , которое имеет вид



переводит точки вне окружности единичного радиуса в точки всей плоскости и точки, лежащие внутри окружности  в точки, заполняющие всю плоскость. Такие образом, приведенное преобразование переводит плоскость z в два листа плоскости  .

Та же картина имеет место при преобразовании вида

,

т.е. плоскости z будут соответствовать два листа плоскости  .

Из этого можно заключить, что если задано течение на всей плоскости , то ему на плоскости  будет соответствовать течение на двух листах.

Например, если течение в плоскости z определяется комплексным потенциалом [12, c. 122]

 ,

где m действительно, то при конформном отображении  источник в начале координат плоскости z перейдёт в источник, расположенный в бесконечности на одном листе, а на другом листе в бесконечности будет расположен сток. Жидкость с одного листа на другой будет перетекать через разрез вдоль оси  на плоскости  , в который переходит окружность единичного радиуса плоскости z.

Так как  то линии тока источника () перейдут на плоскости в линии, определяемые уравнениями:



исключив из которых r , найдём уравнение линии тока на плоскости :

 (46)

Таким образом, источнику на плоскости z будет на листах плоскости  соответствовать течение, представляющее собой вытекание или втекание жидкости из разреза вдоль гипербол (46), как это изображено на рисунке 15.



а) б)

Рисунок 15  Течение, представляющее собой вытекание или втекание жидкости из разреза вдоль гипербол

3.3.5 Давление при обтекании со срывом струй и при обтекании с циркуляцией

Если происходит обтекание со срывом струй некоторого контура, обладающего осью симметрии, ориентированной в потоке параллельно скорости в бесконечности (рисунок 16), то, очевидно, что результирующее давление потока на такой контур направлено по вектору  и может быть выражено формулой



Замечая, что  и обозначая через расстояние между точками срыва струй и , имеем



а применяя далее интеграл Бернулли-Коши, получаем



откуда приходим к простому неравенству, подмеченному впервые С.А. Чаплыгиным,





Рисунок 16 - Обтекание со срывом струй некоторого контура

В частности, это неравенство будет иметь место и при прямом ударе струи на круговую дужку, обращенную к потоку либо выпуклостью, либо вогнутостью (рисунок 17). Если есть радиус дуги и  - угол, ею стягиваемый, то

 и  (47)



Рисунок 17  Прямой удар струи на круговую дужку

Если же такая круговая дуга обтекается потоком с углов атаки без срыва струй и при наличии циркуляции, подобной при условии, чтобы скорость у заднего края дуги оставалась конечной (рисунок 18), то величина поддерживающей силы выразится формулой (63), т.е.





Рисунок 18  Обтекание круговой дуги без срыва струй

Сравнивая с формулой (47), получаем, что



Если угол  взять таким, чтобы было

 (48)

то  ; при угле атаки  это условие дает ; при для угла  получается еще меньшее значение, начиная с которого будет удовлетворяться условие (48). Этот вывод указывает на несостоятельность элементарного объяснения подъема аэроплана или воздушного змея действием косого удара струи [24, c. 352].

3.3.6 Обтекание с кавитацией

Скорость жидкости обращается в бесконечность в острых кромках профиля. В стационарном решении согласно закону Бернулли в острых кромках возникнут при этом бесконечно большие отрицательные давления. Если кривизна обтекаемого профиля везде конечна, то и давление будет конечным, но оно может принимать, в математическом решении, большие по абсолютной величине отрицательные значения. В реальной жидкости отрицательные давления практически не появляются. Дело в том, что когда давление падает до определенной, зависящей от температуры жидкости малой положительной величины , жидкость в определенных условиях начинает испаряться, образуется область, заполненная парами жидкости, сплошность движения нарушается. Явление это называют кавитацией.

При кавитации образуются целые полости - каверны, наполненные парами жидкости. На границе между такой полостью и жидкостью можно принимать давление постоянным и равным величине ; поэтому эту границу можно рассматривать как свободную поверхность - струю, сходящую с обтекаемого контура. Так как давление на бесконечности  будет больше, чем , то теперь свободная поверхность не будет уходить в бесконечность, а будет стремиться замкнуться на конечном расстоянии от профиля (рисунок 19).

Теперь можно рассмотреть идеальную схему явлений.



Рисунок 19  Прямое обтекание пластинки

При обтекании позади тела образуются свободные поверхности, которые смыкаются сзади тела и порождает струю, втекающую внутрь каверны. Тогда придется ввести струю внутрь каверны, а само движение рассматривать на римановой поверхности, причем считать, что струя переходит на второй лист поверхности и там уходит в бесконечность. Давление вдоль поверхности каверны всюду равно (давление невозмущенного потока ), а направление струи, входящей в каверну, прямо противоположно направлению скорости потока, набегающего на тело.

Метод решения задачи проиллюстрируем на примере прямого обтекания пластинки (рисунок 19) .

Введем вспомогательную плоскость и представим, что вся внешность каверны отображена конформно на внутренность полукруга с диаметром вдоль действительной оси  (рисунок 20).

Пусть при этом поверхность струи переходит в верхний полукруг, а точки и  ( края пластинки) переходят в точки и соответственно ( точки и плоскости ).

Мы уже условились втекание струйки в полость каверны представлять как переход на второй лист римановой поверхности. Пусть втекание происходит в точке .

Переходя на второй лист в точке , струя уходит на бесконечность.



Рисунок 20  Полукруг с диаметром вдоль действительной оси 

Пусть точке  отвечает на плоскости  точка . Так как лежит на струе, то находится на полуокружности в плоскости , причем в силу симметрии задачи точке  отвечает точка . Кроме критической точки , которая переходит в  ,в этом потоке будем иметь еще одну критическую точку вне области кавитации. Пусть она переходит в точку на мнимой оси с координатой  Бесконечно удаленной точке  первого листа плоскости отвечает точка  с координатой  Пусть отображение дается функцией  Обозначим и будем рассматривать  как комплексный потенциал некоторого фиксированного течения внутри этой полуокружности в плоскости . По особенностям в плоскости  легко определить вид функции . Действительно, в этом фиктивном течении мы должны расположить особенность типа стока в точке , особенность типа дублета в точке , вихрь в точке ; точки и  этого течения, так же как и и , должны быть критическими точками. Таким образом,  имеет полюс первого порядка в точке , полюс второго порядка в точке , нули первого порядка в точках Так как на полукруге и на диаметре можно продолжить на всю плоскость, используя отражение от диаметра и инверсию по отношению к единичному кругу. Тогда прибавятся еще полюс 1-го порядка в точке ,полюса второго порядка в точках  нули первого порядка в точках  Функция  будет рациональной на всей плоскости.

Запишем

 (49)

Обозначим теперь через постоянную величину скорости на границе каверны. Заметим, прежде всего, что внутри верхнего полукруга функция  имеет нули в точках  и .

Строя  по нулям и полюсам, получим



где   постоянная, которую найдем из условия, что при будет (скорость направлена в точке  в сторону, противоположную направлению обтекания). Таким образом, 

Итак,

 (50)

Из (49) и (50) сразу следует, что

 (51)

Для определения значений трёх постоянных и будут служить три условия:

1) условие для скорости набегающего потока;

2) условие однозначности соответствия  в точке  и в точке ;

) уравнение, дающее ширину пластинки.

Согласно первому условию , если ,то  , тогда

 (52)

Второму условию удовлетворим, если потребуем равенства нулю вычета  в точке . Это можно свести к равенству





Производя расчеты, получим

 (53)

Уравнения (52) и (53) определяют и  через  Для определения  надо использовать условие, дающее ширину пластинки, т.е.

 (54)

Интегрирование в (54) выполняется, если разложить (51) на элементарные дроби. Если использовать еще (51) и (52), получим [24, c. 354]



Число кавитации определяется по формуле



Применяя закон Бернулли, получим, что отношение  , входящее в формулы, просто выражается через число кавитации, т.е.



3.4 Метод конформных отображений в аэродинамике

.4.1 Обтекание профилей Жуковского

Конформное преобразование

 (55)

примененное при изучении обтекания эллиптического цилиндра

отображает окружность единичного радиуса в плоскости 

 (56)

на отрезок оси между фокусами эллипса [,] в плоскости , причем этот отрезок проходится дважды в противоположных направлениях, когда соответственная точка  пробегает окружность (56) один раз.

Приводя формулу (55) к виду



и вводя новые переменные  и  при помощи преобразования подобия



видим, что преобразование

 (57)

переводит окружность радиуса 



плоскости  в отрезок  вещественной оси плоскости ,пройденный дважды. Представив преобразование в виде



можем убедиться, что окружность плоскости  с центром на мнимой оси в некоторой точке , проходящая через точки и  вещественной оси , перейдет в дугу окружности  на плоскости , опирающуюся на точки  и  вещественной оси и имеющую вершину в точке  на мнимой оси, при этом дуга  проходит дважды (рисунок 21).

Кроме того, имеем

 (58)

Называя через  модули чисел а через  их аргументы, имеем



откуда

 (59)

Упомянутые комплексные числа выражаются векторами и, значит, разности



выражают углы, под которыми отрезки и  видны соответственно из точек  и ; а так как для окружности , то вследствие (59) будет и, т.е. линия представляет собой дугу окружности.



а) б)

Рисунок 21  Профиль Жуковского

Таким образом, преобразование (57) отображает полную окружность плоскости 



где



хорда которой вмещает со стороны центра угол  и опирается на центральный угол (рисунок 21)

,

в дугу  плоскости , хорда которой вмещает со стороны, противоположной центру, угол  и опирается на центральный угол



Радиус  дуги  найдется из треугольника по формуле



При этом полному обходу окружности  отвечает дважды проходимая в противоположных направлениях дуга .

Рассмотрим наряду с окружностью , которую будем называть основною, некоторую соседнюю окружность  радиуса , центр которой поместим на продолжении радиуса  основной окружности так, чтобы она касалась основной окружности в точке  (рисунок 21).

Так как окружностьохватывает полностью окружность , то после применения преобразования (57) она перейдет в некоторую замкнутую кривую  охватывающую дугу . В точке   кривая  будет касаться дуги , подходя к ней с обеих сторон, т.е. образуя острие.

Если через центр окружности  провести координатные оси параллельно осям , то точки комплексной плоскости  относительно новых осей будут связаны с соответствующими точками плоскости  при помощи преобразования параллельного переноса

 (60)

где  комплексное число плоскости , изображающее . Вводя в рассмотрение угол  наклона радиуса основной окружности к отрицательному направлению вещественной оси , имеем

,

и, значит,



где



Таким образом,



Пусть теперь окружность  обтекается в плоскости  поступательным потоком с циркуляцией ; пусть при этом скорость в бесконечности  этого потока образует угол  с положительным направлением вещественной оси, так что



Комплексный потенциал течения выражается формулой



Выразив здесь  сначала  на основании (60)



где , а затем   через на основании формулы (57),которая дает



получим комплексный потенциал течения при обтекании профиля  в плоскости :



Вычисляя комплексную скорость в бесконечности для течения в плоскости ,имеем

 и, значит, 

Скорость потока в плоскости  у задней точки  контура  может оказаться бесконечной



т.е



при 

Для того чтобы задача обтекания профиля  имела физический смысл, скорость потока на профиле и вне его должна оставаться конечной. Поэтому подберем интенсивность циркуляции так, чтобы удовлетворить требованию конечности скорости. Для этого выберем  так, чтобы  в точке  плоскости , т.е. при .

Производя вычисления, найдем:

 (61)

где 

Для расчета главного вектора гидродинамических реакций (на единицу длины цилиндра), приложенных к профилю  со стороны потока, воспользуемся формулой Кутта-Жуковского



Подставляя сюда выражение для  (61), имеем

 (62)

Вектор , направленный перпендикулярно вектору скорости  называют поддерживающей силой; для величины  имеем



При малых  можно приближенно положить



или

 (63)

К тем же формулам приходит Жуковский, применяя преобразование



где  указанное С.А. Чаплыгиным и не отличающееся по существу от преобразования (55) или (57), примененного выше.

Профили, получаемые применением того или другого преобразований к некоторой окружности, соприкасающейся с основной окружностью в особой точке преобразования и заключающей внутри вторую особую точку, получили общее название профилей Жуковского, впервые указавшего на их применение в качестве профилей крыла аэроплана.

Профили Жуковского при заданном расстоянии  в плоскости профиля между особыми точками преобразования характеризуются двумя параметрами и, из которых первый характеризует изгиб или кривизну крыла, а второй  его толщину.

Формула (62) показывает, что поддерживающая сила обращается в нуль и меняет свое направление, если угол , называемый также углом атаки, принимает значение



Максимальной величины поддерживающая сила достигает при



При  получим

 или  (64)

где 

Есть так называемая стрела прогиба кривой дуги  Формула (64) выражает теорему Чаплыгина о том, что поддерживающая сила при обтекании без срыва струй круговой дуги потоком, скорость которого в бесконечности параллельна хорде, стягивающей дугу, не зависит при данной стреле прогиба от длины дуги и ее радиуса.

Для вычерчивания профилей Жуковского при заданных параметрах можно применить простой прием. Построив в плоскости соприкасающуюся окружность  радиуса (рисунок 22), из которой получается профиль Жуковского после применения преобразования





Рисунок 22  Профиль Жуковского после применения преобразования

Строим вспомогательную окружность  , получаемую из  путем преобразования инверсии и симметрии



Так как при этом преобразовании окружность переходит в окружность, причем вещественная ось переходит сама в себя, то по свойству конформности окружность  будет пересекать вещественную ось под тем же углом, что и окружность , иначе говоря, и  будут касаться друг друга в точке через которую проходит ; следовательно, центр  окружности расположится на прямой .

С другой стороны, центр , который, заметим, не является соответственной точкой для центра окружности , будет лежать на луче (2), являющемся отражением луча (1) от мнимой оси. Так как точки и  пересечения окружностей  и  с вещественной осью являются соответственными, то вследствие 



После необходимых расчетов, построив геометрическую сумму векторов и 



вследствие (57), получим соответственную точку профиля Жуковского.

Конформное преобразование плоскости  на плоскость  представляется равенством



так что при сравнении  получаем









Для острой кромки профиля Жуковского



а, следовательно,



Конформный центр тяжести профиля имеет координату  , т.е. совпадает с точкой . Проводя через него прямую  ,составляющую угол  с осью  ,получим критическую ось профиля (рисунок 23).

Фокус профиля определится по формуле:



отсюда видно, что направление  симметрично с направлением критической оси относительно оси  и что расстояние между точками и определяется по формуле



Зная фокус  параболы устойчивости и ее директрису - критическую ось профиля, без труда построим эту параболу.

Ее параметр  имеет значение



Момент реакции относительно фокуса  имеет постоянное значение



Посчитаем еще момент реакций относительно конформного центра тяжести 



Ясно, что этот момент обращается в нуль, если  или 

Таким образом, если поток на бесконечности параллелен оси  или , то сила реакции будет проходить через точку  и, следовательно, будет направлена по оси  или  Таким образом, парабола устойчивости касается как прямой , так и прямой.

В частном случае, когда , получаем симметричный профиль, носящий название руля Жуковского (рисунок 24).



Рисунок 23  Профиль крыла аэроплана



Рисунок 24  Руль Жуковского

В этом случае  и парабола устойчивости вырождается в точку , лежащую на оси симметрии профиля; совокупность реакций проводится к одной равнодействующей , приложенной при всяком угле атаки к точке , которая является постоянным центром давлений [24, c. 280].

3.5 Метод конформных отображений в теории фильтрации

Для рассмотрения фильтрационных течений на криволинейной поверхности, в частности в грунте с прерывно изменяющейся проницаемостью, которые описываются уравнениями следует представить квадрат элемента дуги поверхности в виде . Последнее представляет собой конформное преобразование поверхности на плоскости. Таким образом, конформное преобразование всей плоскости на всю поверхность позволяет строить фильтрационные течения в слоях, расположенных на поверхности по соответствующим течениям на плоскости.

3.5.1 Поток, искаженный прямолинейной щелью

Обтекание круговой каверны единичного радиуса поступательным потоком, скорость которого в бесконечности , в плоскости описывается комплексными потенциалами





Отобразим конформно область вне окружности на всю плоскость с разрезом ширины  вдоль действительной оси. Это отображение осуществляется функцией



Исключим  из двух последних равенств. Находим комплексный потенциал вида

 (65)

который описывает течение, возникающее в результате внесения в поступательный фильтрационный поток щели, заполненной свободной жидкостью. Щель расположена параллельно направлению скорости течения в бесконечности.

Из формулы (65) можно определить потенциал скорости и функцию тока течения, а также составляющие скорости течения. Последние будут принимать бесконечное значение на концах щели (рисунок 25).



Рисунок 25  Линии тока и направление скорости течения

3.5.2 Поток, искаженный непроницаемой заслонкой

Обтекание непроницаемой окружности единичного радиуса поступательным потоком, скорость которого в бесконечности , в плоскости  описывается комплексным потенциалом



Отобразим конформно область вне окружности на всю плоскость с разрезом ширины вдоль мнимой оси. Это отображение осуществляется функцией



Исключив  из последних равенств, найдем



Полученный комплексный потенциал описывает течение, возникающее в результате внесения в поступательный фильтрационный поток непроницаемой пластинки (рисунок 26). Следует заметить, что в результате нарушения конформности преобразования на концах пластинки имеют место бесконечные скорости течения [24, c. 298].



Рисунок 26  Линии тока и направление скорости течения

3.5.3 Построение течений в прерывно неоднородных средах

Рассмотрим частный случай фильтрационного течения в прерывно неоднородном грунте, расположенном в плоскости , которое описывается комплексными потенциалами вида

 (66)

где  определен вне окружности радиуса - внутри окружности. Преобразуем плоскость  в плоскость  при помощи функций

 (67)

полагая, что 

Тогда совокупность формул (66) и (67) определит течение на плоскости . На рисунке 27 указан эллипс, внутри которого расположена непроницаемая окружность.

Если преобразование от плоскости  к плоскости  осуществить при помощи соотношения

 (68)

где , то совокупность формул (66) и (68) определит комплексные потенциалы течения на плоскости , причем  будет определен вне эллипса,  -внутри эллипса, и последний будет служить границей раздела сред с различными проницаемостями , на плоскости . Внутри эллипса будет располагаться каверна (рисунок 28).



Рисунок 27 - Линии тока указанного течения

Рассмотренные примеры при использовании





Рисунок 28  Линии тока и каверна внутри эллипса

и



приводят на плоскости  к появлению круглых непроницаемых включений или каверн.

Все построенные в плоскости течения можно конформно отобразить на другие поверхности и получить аналоги соответствующих плоских течений. [24, c. 308].

. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА КОНФОРМНЫХОТОБРАЖЕНИЙ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД В XXI ВЕКЕ

4.1 Моделирование некоторых фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями

Это исследование проведено Э.Н. Береславским, Л.А. Александровой и Е.В. Пестеревым в 2010 году в Санкт- Петербургском государственном университете гражданской авиации. Исследование проводилось в рамках двумерной стационарной модели в однородном и изотропном грунте несжимаемой жидкости при использовании закона Дарси с известным коэффициентом фильтрации  . Исследовались некоторые фильтрационные течения и под шпунтом Жуковского. В этой работе решение соответствующих много параметрических смешанных краевых задач теории аналитических функций осуществляется с помощью метода конформных отображений областей специального вида. Приводятся результаты численных расчетов и дается подробный гидродинамический анализ влияния определяющих физических параметров моделей на картину течений [4, с. 27].

4.2 О режиме грунтовых вод при фильтрации под гидротехническими сооружениями

Настоящая работа является непосредственным продолжением статьи автора Береславского Э.Н. «Моделирование некоторых фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями». В ней на основе теории плоской установившейся фильтрации несжимаемой жидкости по закону Дарси в однородном и изотропном грунте рассматриваются следующие задачи , связанные с фильтрационными течениями с неизвестными границами под гидротехническими сооружениями:

1) строится плавный подземный контур заглубленной прямоугольной плотины постоянной скорости фильтрации в том случае, когда водопроницаемое основание подстилается водоупором, который состоит из двух криволинейных и одного (среднего) горизонтального участков, при характерном постоянстве скорости обтекания;

2) исследуется течение жидкости под шпунтом Жуковского через орошаемый грунтовой массив с нижележащим сильнопроницаемым водоносным горизонтом, содержащим напорные подземные воды; левая полубесконечная часть его кровли моделируется непроницаемым включением.

Для изучения этих движений формируются смешанные многопараметрические краевые задачи теории аналитических функций, решение которых осуществляется с помощью полуобратного способа годографа скорости П.Я. Полубариновой - Кочиной и И.Н. Кочиной, метода П.Я. Полубариновой- Кочиной, основанного на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений класса Фукса, а также разработанных способов конформного отображения областей специального вида, которые характерны для задач подземной гидромеханики.

Приводятся результаты численных расчетов и дается гидродинамический анализ влияния физических параметров моделей на картину течений. Отмечаются предельные случаи этих задач, исследованные ранее в работе Береславского Э.Н. «Моделирование некоторых фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями» [5, с. 27].

4.3 О течении жидкости из оросителей

Это исследование проведено Э.Н. Береславским, Н.В Лихачевой в 2012 году в Санкт - Петербургском государственном университете гражданской авиации.

В гидродинамической постановке рассматривается плоская установившаяся фильтрация в однородном изотропном грунте из оросителей через почвенный слой с нижележащим сильнопроницаемым напорным водоносным горизонтом при наличии капиллярности грунта и испарения со свободной поверхности. Для ее изучения формулируется смешанная многопараметрическая краевая задача теории аналитических функций, которая решается с помощью применения метода П. Я. Полубариновой-Кочиной и способов конформного отображения областей специального вида, характерных для задач подземной гидромеханики. На базе этой модели разработан алгоритм расчета капиллярного растекания воды и фильтрационного расхода в ситуациях, когда при фильтрации воды из оросителей учитывается капиллярность грунта, испарение со свободной поверхности грунтовых вод, а также подпор со стороны вод нижележащего хорошо проницаемого пласта. С помощью полученных точных аналитических зависимостей и численных расчетов проводится гидродинамический анализ структуры и характерных особенностей моделируемого процесса, а также влияния всех физических параметров схемы на фильтрационные характеристики. Рассматриваются предельные и частные случаи, связанные с отсутствием одного или двух из трех факторов, характеризующих моделируемый процесс: капиллярность грунта, испарение со свободной поверхности, а также подпор со стороны вод нижележащего водоносного сильно проницаемого слоя.

Наконец, результаты расчетов сопоставляются при одинаковых фильтрационных характеристиках с подобной схемой при фильтрации из каналов [6, с. 107].

.4 Об интегрировании в замкнутой форме некоторых дифференциальных уравнений класса Фукса, связанных с конформным отображением круговых пятиугольников с разрезом

В 2010 году для решения задачи о конформном отображении некоторых круговых пятиугольников с разрезом Э.Н. Береславским предлагается воспользоваться специальными методами, приспособленными к классу многоугольников в полярных сетках, которые основываются на нахождении частных решений уравнений фуксового типа в виде линейных комбинаций с неопределенными коэффициентами из известных частных решений некоторых более простых уравнений с тремя особыми точками. Результаты применяются сначала для решения задач о конформном отображении круговых четырехугольников с разрезом, принадлежащих классу многоугольников в полярных сетках, а затем с учетом полученных решений к пятиугольникам более сложной структуры, не являющимися полярными. Во всех случаях дается полное решение задачи о параметрах [8, с.459].

4.5 Построение подземного контура гидротехнического сооружения с участками постоянной скорости обтекания

В 2008 году Э.Н. Береславский проводит построение подземного контура заглубленной прямоугольной плотины, углы которой округлены по кривым постоянной величины скорости фильтрации, а водопроницаемое основание подстилается водоупором с криволинейной кровлей, характеризуемым постоянством скорости обтекания. Решение соответствующей краевой задачи осуществляется с помощью полуобратного применения метода годографа скорости. Приводятся результаты численных расчетов и дается анализ влияния основных определяющих параметров модели на форму и размеры подземного контура плотины и криволинейного водоупора. Подробно изучаются предельные случаи, когда водопроницаемое основание плотины имеет неограниченную мощность: обтекаемый флютбет с горизонтальной вставкой и обтекаемый шпунт (зуб) [3, с. 103].

4.6 Гидродинамика скручивания наносвитка

В 2009 году С.А. Чивилихиным, И.Ю. Поповым, В.В. Лесничим, В.В. Гусаровым исследуется начальная стадия формирования наносвитков в гидротермальной среде - стадия скручивания двойного слоя под действием внутренних напряжений. В настоящей работе построен аналитический формализм, позволяющий рассчитать поле скоростей жидкости, а также распределение вязких напряжений по поверхности нанотрубки. Указанные поля имеют сингулярность в точке касания нанотрубки и нанопластинки. Для регуляризации этой особенности использован метод молекулярной динамики, примененный к области, примыкающей к особой точке.

В работе исследовано течение жидкости в окрестности скручивающейся нанотрубки и рассчитаны силы вязкого трения, ограничивающие скорость скручивания трубки. Впервые задача о скручивании наряженного слоя в нанотрубку рассмотрена в 2006 году М.Ю. Гуткиным, А.М Кривцовым, Н.Ф. Морозовым, Б.Н. Семеновым «Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород» [11, с. 3].

4.7 К теории индукционных явнополюсных машин

При анализе явнополюсных электрических машин в 2009 году записал В. Ф. Самосейко конформное отображение, задающее поле Лапласа в воздушном зазоре машины и позволяющее определить форму ротора, при которой распределение магнитной напряженности на поверхности статора имело бы синусоидальную форму. Найдены основные параметры обмоток машины. Записаны уравнения напряжений для основной гармоники и высших гармоник ряда Фурье, а также выражение электромагнитного момента [29, с. 38].

4.8 Численный расчет распространения импульсного магнитного поля через массивный ферромагнитный экран

В 2010году А.А. Афанасьевым моделируется метод сопряжения конформных отображений процесс прохождения через ферромагнитный экран импульсного магнитного поля, генерируемого высоковольтным разрядом конденсатора на катушку со стальным шихтованным сердечником. Рассматриваются два вида катушек: с прямоугольным и круговым поперечными сечениями. В последнем случае рассчитывается осесимметричное магнитное поле [2, с. 31].

.9 Об однозначной определенности выпуклых многогранных облас- тей в трехмерном евклидовом пространстве относительными конформными модулями граничных конденсаторов

В 2011 году А. П. Копыловым проводятся исследования по однозначной определенности областей в евклидовом пространстве относительными конформными модулями их граничных конденсаторов [23, с 162].

Метод конформных отображений даёт возможность решать сложные задачи, прямое решение которых математически затруднительно.

Метод конформных отображений позволяет многие сложные физические явления представить в виде наглядных математических моделей для их исследования и решения возникающих проблем. Метод конформных отображений позволяет решать как сложные математические, так и сложные физические задачи [37, c. 104].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе работы над темой диплома были расширены и углублены знания по многим вопросам математического анализа, аналитической геометрии, теории функций комплексного переменного, теории аналитических функций, подробно изучена теория конформных отображений, теория построения римановых поверхностей. Изучена история развития методов теории функций комплексного переменного и их использования в механике сплошных сред.

Результатом проделанной работы явилось исследование метода конформных отображений в механике сплошных сред. Решены конкретные задачи, выполнены необходимые расчёты.

В первой главе рассмотрены общие принципы теории конформных отображений, их основные свойства.

Во второй главе рассмотрены классические примеры расчёта конформных отображений.

В третьей главе рассмотрено применение метода конформных отображений в механике сплошных сред.

В четвёртой главе отмечаются современные практические примеры использования конформных отображений в механике сплошных сред, выполненные в последние годы.

В процессе исследования особое внимание уделялось научному вкладу отечественных учёных.

Итогом работы является следующее: разработан научно-методический подход к данной теме, систематизирован материал.

Дипломная работа может служить учебно-методическим пособием по данной теме.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 Авхадиев, Ф.Г. Конформные отображения и краевые задачи : монография / Ф.Г. Авхадиев. - М. : Математика, 1996. - 216 с.

2 Афанасьев, А. А. Численный расчет распространения импульсного магнитного поля через массивный ферромагнитный экран / А.А. Афанасьев, В.В, Ефимов // Электричество. - 2012. - № 1. - С. 31 - 35.

3 Береславский, Э Н. Построение подземного контура гидротехнического сооружения с участками постоянной скорости обтекания / Э. Н. Береславский // Известия РАН. Механика жидкости и газа. - 2008. - № 5. - С. 103 - 112

4 Береславский, Э. Н. Моделирование некоторых фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями / Э. Н. Береславский, Л. А. Александрова, Е. В. Пестерев // Математическое моделирование. - Санкт- Петербургский государственный университет гражданской авиации. - 2010. - С. 27 - 37.

5 Береславский, Э. Н. О режиме грунтовых вод при фильтрации под гидротехническими сооружениями / Э. Н. Береславский, Л. А. Александрова, Е. В. Пестерев // Математическое моделирование. - 2011. - № 2. - С. 27 - 40.

6 Береславский, Э. Н. О течении жидкости из оросителей / Э. Н. Береславский, Н. В. Лихачева // Математическое моделирование. - 2012.- С. 107 - 108.

7 Береславский, Э. Н. Об интегралах некоторых дифференциальных уравнений класса Фукса, встречающихся в задачах механики жидкостей и газов / Э. Н. Береславский // Дифференциальные уравнения. - 2012. - № 4. - С. 590 - 594.

8 Береславский, Э. Н. Об интегрировании в замкнутой форме некоторых дифференциальных уравнений класса Фукса, связанных с конформным отображением круговых пятиугольников с разрезом / Э. Н. Бересловский // Дифференциальные уравнения. - 2010. - № 4. - С. 459 - 466.

9 Власов, В. И. Аналитико-численный метод конформного отображения сложных областей / В. И. Власов, А. Б. Пальцев // Доклады Академии наук.- 2009. - С. 12 - 14.

10 Волковыский, Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного / Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г Араманович. - М. : Физматлит, 2004. - 312 с.

11 Гидродинамика скручивания наносвитка / С. А. Чивилихин [и др. ] // Известия вузов. Физика. - 2009. - № 11. - С. 3 - 6.

12 Голубева, О.В. Курс механике сплошных сред : учебное пособие для педвузов / О.В. Голубева. - М. : Высшая школа, 1972. - 368 с.

13 Гончар, А.В. Практикум по Теории функций комплексного переменного : учебное пособие / А.В. Гончар. - Нижний Новгород : Высшая школа, 2005. - 51 с.

14 Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. / П.Е. Данко. - М. : Оникс, 2005. - Ч.1. - 304 с.

15 Долженко, Е. П. О граничной гладкости конформных отображений областей с негладкими границами / Е. П. Долженко // Доклады Академии наук. - 2007. - С. 155 - 159.

16 Долженко, Е. П. Конформное отображение [Электронный ресурс] // Математическая энциклопедия : офиц. сайт. - Режим доступа: http : // dic. academic. ru. - <http://dic.academic.ru/.-> 17.03.2013.

Завьялов, Б. И. Конформное отображение [Электронный ресурс] // Энциклопедия математики и физики : офиц. сайт. - Режим доступа: http : // www. femto. com. ua / index1. html. - 15.03.2013 <http://www.femto.com.ua/index1.html.-%2015.03.2013>.

Иванов, В. И. Конформные отображения и их приложения / В. И. Иванов, В.Ю. Попов. - М. : Едиториал УРСС, 2002. - 324 с.

Константинов, Р.В. Применение конформных отображений в решении некоторых задач электро- и магнитостатистики / Р.В. Константинов.- М. : Физматкнига, 2003. - 22 с.

Конформное отображение [Электронный ресурс]. - Режим доступа : http : // mschool. kubsu. ru / tfkp/html/teor/r24-27.htm.- 20.03.2013 <http://mschool.kubsu.ru/tfkp/html/teor/r24-27.htm.-%2020.03.2013>

Конформные отображения. Интегрирование функций комплексного переменного [Электронный ресурс]. - Режим доступа : http://vladimnat. narod.ru/.- <http://vladimnat.narod.ru/.-> 26.02.2013

Коппенфельс, В. Практика конформных отображений / В. Коппенфельс, Ф. Штальман. - М. : Изд-во иностранной литературы, 1993. - 486 с.

Копылов, А. П. Об однозначной определенности выпуклых многогранных областей в трехмерном евклидовом пространстве относительными конформными модулями граничных конденсаторов / А. П. Копылов // Доклады Академии наук. - 2011. - № 2. - С. 162 - 164.

Кочин, Н.Е. Теоретическая гидромеханика: в 2 ч. / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. - М. : Государственное издательство технико-теоретической литературыры, 1963. - Ч. 1. - 557 с.

Лаврентьев, М.А. Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики : монография / М.А. Лаврентьев. - М. : ОГИЗ госуд. изд-во технико-теоретической литературы, 1989. - 159 с.

Лаврентьев, М.А. Методы теории комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. - СПб. : Лань, 2002. - 688 с.

Малышева, Н. Б. Функции комплексного переменного : учебник / Н.Б. Малышева. - М. : Физматлит, 2010. - 167 с.

Маркушевич, А. И. Конформное отображение [Электронный ресурс] // Большая советская энциклопедия : офиц. сайт. - 26.09.2012. - Режим доступа : http : // omop. su/ article / 7/38175. html <http://omop.su/article/7/38175.html>. - 24.03.2013.

Самосейко, В. Ф. К теории индукционных явнополюсных машин / В.Ф. Самосейко // Электричество. - 2009. - № 11. - С. 38 - 47.

Свешников, А.Г. Теория функций комплексной переменной / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. - М. : Наука, 2002. - 320 с.

Сидоров, Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. - М. : Наука, 1999. - 480 с.

Сильвестров, В.В. Конформное отображение [Электронный ресурс]. - Режим доступа : http : // www. pereplet. ru/ obrazovanie/stsoros/909.html/.- 24.03.2013.

Современные проблемы механики сплошной среды: Сборник избранных трудов Всероссийской конференции памяти академика Леонида Ивановича Седова в связи со столетием со дня рождения / ред. Г.Г. Чёрный. - М. : ТОРУС ПРЕСС, 2009. - 424 с.

Фильчаков, П. Ф. Приближенные методы конформных отображений : справочное руководство / П. Ф. Фильчаков. - Киев : Наукова думка, 1994. - 516 с.

Финкель, Л. А. Введение в практику конформных отображений, связанных с элементарными функциями : учебное пособие / Л. А. Финкель. - Бишкек: Кырг.гос. нап. ун-т.- 1995. - 79 с.

Фукс, Б.А. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения / Б.А.Фукс, Б.В. Шабат. - М. : Наука, 1984. - 255 с.

Черняк, В.Г. Механика сплошных сред : учебное пособие для вузов / В.Г. Черняк, П.Е. Суетин.- М. : Физматлит, 2006. - 352 с.

Шабат, Б.В. Введение в комплексный анализ. Функции одного переменного. В 2 ч. / Б.В. Шабат. - СПб. : Лань, 2004. - Ч.1 - 336 с.

Шабат, Б.В. Введение в комплексный анализ. Функции одного переменного. В 2 ч. / Б.В. Шабат. - СПб. : Лань, 2004. - Ч.2 - 464 с.

40 Math Help Planet.com : Математический форум [Электронный ресурс]. - Режим доступа : http : // mathhelpplanet. com/ static. php ?p = konformnyye- otobrazheniya.- 10.03.2013.