## Нелинейные многоволновые взаимодействия в упругих системах

На основе закона сохранения энергии предлагается физическая интерпретация свойств решений эволюционных уравнений, описывающих амплитудно-фазовую модуляцию нелинейных волн. Приводится алгоритм приведения дифференциальных уравнений, описывающих нелинейные многоволновые процессы в распределенных механических системах, к нормальной форме. Изучаются вопросы возникновения резонанса.

Solutions to the evolution equations describing the phase and amplitude modulation of nonlinear waves are physically interpreted basing on the law of energy conservation. An algorithm reducing the governing nonlinear partial differential equations to their normal form is proposed. The occurrence of resonance at the expense of nonlinear multi-wave coupling is discussed.

## Введение

Принципы нелинейных многоволновых взаимодействий были впервые признаны примерно два века назад, благодаря экспериментальным и теоретическим работам Фарадея (1831), Мельде (1859), Релея (1883, 1887). Неплохой исторический обзор этой темы может быть найден в работе [1], так что необходимы лишь только несколько вводных замечаний. До первой мировой войны подобные идеи воплощались в радиотелефонных устройствах. После второй мировой войны появилось множество новых приложений в технике и технологиях, включая высокочастотную электронику, нелинейную оптику, океанологию, физику плазмы и т.д. Сегодня теория нелинейных многоволновых взаимодействий, применительно к механическим системам, развита не в той степени, чтобы найти уже сейчас свое достойное применение на практике.

В работе представлена попытка объединения и обобщения тематической информации на основе уже достаточно известных, но разрозненных фактов. На основе закона сохранения энергии предлагается физическая интерпретация свойств решений эволюционных уравнений, описываюцих амплитудно-фазовую модуляцию нелинейных волн. Приводится алгоритм приведения дифференциальных уравнений, описывающих нелинейные многоволновые процессы в распределенных механических системах, к нормальной форме. Изучаются вопросы возникновения резонанса в нелинейных многоволновых системах.

## Эволюционные уравнения

Распространение слабонелинейных волн в упругих средах обычно описывается квазилинейными дифференциальными уравнениями с частными производными

,

где  и  - линейные дифференциальные матричные операторы, характеризующие инерционные и упругие свойства системы, т.е. ;  - вектор нелинейных величин;  - малый параметр задачи, характеризующий меру нелинейности[[1]](#footnote-1). В любой момент времени  искомые переменные системы  относятся к пространственным координатам .

Пусть закон движения системы определяется функцией Лагранжа . Пусть при  существует вырожденный лагранжиан , производящий линеаризованные уравнения движения. Пусть решение последних “порождающих” уравнений представляется суперпозицией нормальных гармонических волн:

.

Здесь  - комплексные амплитуды волн[[2]](#footnote-2);  - быстро вращающиеся волновые фазы; символ  обозначает комплексно сопряженные слагаемые. Собственные частоты  и соответствующие волновые векторы  связаны дисперсионным соотношением .

При малых значениях  решение нелинейных уравнений можно формально представить в той же самой форме, что и в линейном случае, если не считать малых пространственно-временных вариаций амплитуд волн . Физически, спектральное описание в новых координатах , вместо полевых переменных , связано с возникновением новых пространственно-временных масштабов и, соответственно, с разделением движений на быстрые и медленные.

В настоящей заметке преимущественно будут изучаться лагранжевы нелинейные динамические системы.

Чтобы яснее понять сущность эволюционных уравнений, вводится функция Гамильтона , где . Далее рассматривается вырожденный гамильтониан системы . Отсюда следует, что амплитуды линеаризованного решения , представляющие собой константы интеграции при , должны удовлетворять следующему соотношению

,

где  - скобка Ли-Пуассона с подходяще определенными функциональными производными. В свою очередь, при , комплексные амплитуды являются медленно меняющимися функциями, так что . Это означает, что

(1)  и ,

где разность  можно интерпретировать как “свободную энергию" системы. Таким образом, если скаляр , то нелинейная “динамическая структура" должна возникать спонтанно, напротив, при  системе требуется некоторая порция энергии для организации структуры, в то время как случай  представляется пограничным между этими двумя состояниями. Заметим, что систему (1) можно формально переписать в виде

(2) , 

где  - векторная функция, одним из формальных аргументов которой, а именно , является операция дифференцирования по пространственным координатам. В полярных координатах  уравнения (2) приводятся к стандартной форме

(3) ; ,

где . В большинстве случаев векторная функция  представляется рядом по малому параметру , что позволяет применять известные асимптотические методы исследования.

## Нормальная форма уравнений

Рассматривается натуральная[[3]](#footnote-3) квазилинейная механическая система, движение которой характеризуется лагранжевыми уравнениями, представленными в квазинормальной матричной форме [2]

(4)  и 

с соответствующими граничными и начальными условиями. Здесь  обозначает комплексный -мерный вектор решения ( - матрица линейного нормализующего преобразования искомых переменных ,  -  единичная матрица);  -  диагональная матрица дифференциальных операторов с собственными значениями , где  - пространственный дифференциальный оператор (очевидно[[4]](#footnote-4), что );  - -мерный вектор нелинейности , представленный рядом по , т.е.

,

где  - однородные векторные полиномы степени , например



Здесь и  - некоторые заданные дифференциальные операторы.

Наряду с системой (4) рассматривается соответствующая линеаризованная подсистема

(5)  и ,

аналитическое решение которой, удовлетворяющее соответствующим краевым и начальным условиям, представляется суперпозицией нормальных волн

,

где  - постоянные комплексные амплитуды;  - число нормальных волн -го типа. Возникает вопрос - есть ли существенная разница между этими двумя системами, иначе говоря, - насколько существенно присутствие малой нелинейности. В соответствии с теорией нормальных форм (см. например [4]), решение уравнений (4) ищется в форме почти тождественного преобразования переменных, т.е.

(6) 

где  - неизвестная -мерная векторная функция, компоненты которой формально представимы рядом по , т.е. почти билинейная форма:

(7) ,

Например



где  и  - неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. При подстановке (6) в (4), получаются следующие дифференциальные уравнения с частными производными для нахождения :

.

Очевидно, что собственные числа оператора , действующего на полиномиальные компоненты функции , т.е. , представляют собой линейные целочисленные комбинации собственных чисел оператора при различных значениях векторов .

В первом приближении получаются линейные уравнения для нахождения нормализующего преобразования:

.

Всякой полиномиальной компоненте  соответствует собственное число , т.е. , где

или

,

в то время как  в наинизшем приближении разложения по .

Аналогично, во втором приближении разложения решения по :



собственные значения оператора  можно выразить в следующем виде: , где . Продолжая и далее подобные итерационные процедуры, можно построить искомое преобразование (7).

Таким образом, если хотя бы одно собственное значение оператора  стремится к нулю, , то соответствующие коэффициенты ряда (7) стремятся к бесконечности, т.е. говорят, что в системе наступает резонанс порядка . В противном случае, если собственные значения оператора  не равны нулю, то системы (4) и (5) называются *формально эквивалентными*, поскольку ряд (7) все же может быть расходящимся. Если же  оказывается ограниченной аналитической функцией, то системы (4) и (5) считаются *аналитически эквивалентными*.

В теории нормальных форм существует основная теорема Пуанкаре, накладывающая одновременно весьма сильные условия на спектральные параметры системы и на коэффициенты нормализующего преобразования, для того чтобы две подходящие различные системы обыкновенных дифференциальных уравнений оказались аналитически эквивалентными. Во множестве задач о колебаниях нелинейных механических систем условия теоремы Пуанкаре, как правило, не выполняются. Например, основные типы резонансов второго порядка ассоциируются с трехволновыми резонансными процессами, когда  и ; процессом генерации второй гармоники, когда  и .

Наиболее важные случаи резонансов третьего порядка следующие: четырехволновые резонансные процессы, при выполнении условий синхронизма: ;  (взаимодействие двух пар волн), или при иных условиях синхронизма  и  (распад высокочастотной волны на тройку низкочастотных волн); вырожденные трехволновые резонансные процессы, при  и ; генерация 3-ей гармоники, при  и .

Во всех приведенных примерах резонансов второго и третьего порядков в общем случае наблюдается ярко выраженная *амплитудная модуляция*, глубина которой растет, когда фазовая расстройка стремится к нулю. Волны, фазы которых удовлетворяют условиям фазового синхронизма, формируют так называемые *резонансные ансамбли*.

Наконец, во втором нелинейном приближении всегда присутствуют так называемые *нерезонансные взаимодействия*, когда условия фазового синхронизма вырождаются в следующие “тривиальные” случаи: кросс-взаимодействия пары волн, при  и ; самовоздействия волны,  и .

Нерезонансные взаимодействия в основном характеризуются только лишь *фазовой модуляцией* волн.

Основное предложение настоящего пункта можно сформулировать следующим образом. Если в системе (4) нет резонансов, начиная с порядка  и до порядка   включительно, то следует ожидать, что нелинейность приведет лишь только к малым поправкам к решениям соответствующей линеаризованной системы. Эти поправки будут того же порядка, , что и мера нелинейности, и вплоть до времен .

Для получения формально пригодного преобразования (7) в резонансном случае, следует пересмотреть структуру системы сравнения (5) в сторону модификации ее правой части:

(8) ; ,

таким образом, чтобы нелинейные слагаемые , где  - однородные полиномы -го порядка, содержали бы только лишь резонансные члены. В этом случае уравнения (8) ассоциируются с так называемыми *нормальными формами*. В практических задачах, ряды  обычно укорачиваются до одного-двух слагаемых соответствующего порядка по .

## Уместны следующие замечания

Теория нормальных форм достаточно просто обобщается на случай так называемых существенно нелинейных систем, поскольку малый параметр  может быть опущен в выражениях (4) - (8) без всякого ущерба для конечного результата, при этом и оператор  может также зависеть от пространственной переменной .

Формально, собственные значения оператора  могут быть произвольными комплексными числами. Это означает то, что резонансы порядка   могут быть определены и проклассифицированы даже и для неколебательных процессов, например применительно к эволюционным уравнениям.

Резонанс в многоволновых системах

Явление резонанса играет ключевую роль в динамике большинства физических систем. Интуитивно, резонанс ассоциируется с одним частным случаем силового возбуждения линейных колебательных систем. Такое возбуждение сопровождается с более или менее скорым ростом амплитуды колебаний при достаточной близости одной из собственных частот колебаний системы к частоте внешнего периодического возмущения. В свою очередь, в случае так называемого параметрического резонанса возникают некоторые рациональные соотношения между собственными частотами системы и частотой параметрического возмущения. Таким образом, резонанс можно проще всего классифицировать, согласно выше приведенному эскизу, по его порядку, начиная с первого, , если включить в рассмотрение и линейные и нелинейные динамические системы. Поэтому, в общем случае, понятие резонанса в колебательных системах может быть связано с физическим явлением, которое характеризуется накоплением энергии одним или несколькими колебательными объектами за счет энергии другой группы колебательных объектов, когда все колебательные процессы объединены некоторым пространственно-временным сродством. Так называемые нерезонансные процессы, такие как кросс-взаимодействия и самовоздействие, также могут быть включены в подобное определение, но со специальной оговоркой, касающейся их специфических динамических свойств.

Для широкого класса механических систем со стационарными краевыми условиями математическое определение резонанса следует из рассмотрения следующих усредненных функций

(9) , при ,

где  - комплексные константы соответствующие решениям линеаризованных эволюционных уравнений (5);  - пространственный объем, занимаемый системой. Если функция претерпевает скачек при заданных значениях  и , то систему следует отнести к резонансной[[5]](#footnote-5). Последнее подтверждается основными результатами теории нормальных форм. Резонанс имеет место при условии выполнения условий фазового синхронизма

 и .

Здесь  - число резонансно взаимодействующих квазирармоник;  - некоторые целые числа ;  и  - параметры малой расстройки.

Пример 1. Рассматриваются линейные поперечные колебания тонкой балки, подверженной действию малой внешней периодической силы и параметрического возбуждения, согласно уравнению

,

где , , , , ,  и  - некоторые подходящие константы, . Это уравнение переписывается в стандартной форме

,

где , , . При , решение уравнения таково, где собственные частоты удовлетворяют дисперсионному соотношению . Если , тогда малые амплитудные вариации удовлетворяют следующему уравнению



где ,  - групповая скорость амплитудной огибающей. Усреднение правой части этого уравнения, в соответствии с (9), дает

, при ;

, при  и ;

 во всяком другом случае.

Отметим, что резонансные свойства системы с нестационарными краевыми условиями не всегда могут быть обнаружены с помощью функции .

Пример 2. Рассматриваются уравнения, описывающие колебания балки по модели Бернулли-Эйлера:



с граничными условиями ; ; . После приведения уравнений к стандартной форме и использовании формулы (9), определяется скачек функции при условиях

 и .

В то же время, резонанс первого порядка, испытываемый продольной волной на частоте , автоматически уже не определяется.

## Литература

1. Kaup P. J., Reiman A. and Bers A. Space-time evolution of nonlinear three-wave interactions. Interactions in a homogeneous medium, *Rev. of Modern Phys.,* (1979) 51 (2), 275-309.
2. Ковригин Д.А., Потапов А.И. Нелинейная волновая динамика одномерных упругих систем. *Изв. вузов. ПНД*, (1996) 4 (2), 72-102.
3. Маслов В.П. *Операторные методы*. М.: Наука, 1973, с.544.
4. Jezequel L., Lamarque C. - H. Analysis of nonlinear dynamical systems by the normal form theory, *J. of Sound and Vibrations*, (1991) 149 (3), 429-459.
5. Журавлёв В.Ф., Климов Д.М. *Прикладные методы в теории колебаний*. М.: Наука, 1973, с.328.

1. Малый параметр  может также характеризовать меру внешнего силового воздействия, диссипацию энергии колебаний, и т.д. В этих случаях уравнения Эйлера-Лагранжа следует модифицировать введением подходящих обобщенных сил. [↑](#footnote-ref-1)
2. Дискретная часть спектра колебаний представима в виде суммы дельта функций, т.е. . [↑](#footnote-ref-2)
3. Под натуральной подразумевается система, обладающая ограниченным ресурсом энергии. [↑](#footnote-ref-3)
4. Например, если оператор  — полином, то , где  — скаляр,  — вектор с постоянными компонентами,  — некоторая функция (более детально см. [3]). [↑](#footnote-ref-4)
5. В прикладных проблемах определение резонанса следует прямо связать с порядком применяемой асимптотической процедуры. Например, если рассматривается первое приближение, то скачками функции  второго порядка, при , следует пренебрегать [5]. [↑](#footnote-ref-5)