**Курсовая работа**

**Плотность распределения случайной величины. Числовые характеристики случайных величин**

**Введение**

дисперсия математический случайный

В данной работе будут рассмотрены такие важные понятия теории вероятностей как случайная величина, функция распределения, функция плотности случайной величины, а так же основные числовые характеристики случайных величин и некоторые из их свойств.

Теория вероятностей - это наука, предметом изучения которой являются закономерности в случайных явлениях. Случайными явлениями принято называть такие явления, которые при неоднократном воспроизведении, в схожих условиях, протекают несколько по-другому.

Случайные отклонения неизбежно способствуют любому закономерному явлению. Тем не менее, в ряде практических задач случайными элементами следует пренебречь, рассматривая вместо реального явления его упрощенную схему (модель) и предполагая, что в данных условиях опыта явление протекает вполне определенным образом. Однако существуют такие задачи, где интересующий нас исход опыта зависит от столь большого числа факторов, что практически невозможно учесть все эти факторы. Это задачи, в которых многочисленные второстепенные, тесно переплетающиеся между собой случайные факторы играют заметную роль, а вместе с тем их число так велико и влияние столь сложно, что применение классических методов исследования себя не оправдывает. Элемент неопределенности, сложности, многопричинности, присущий случайным явлениям, требует создания специальных методов для изучения этих явлений.

Такие методы и разрабатываются в теории вероятности. Ее предметом являются специфические закономерности, наблюдаемые в случайных явлениях. Методы теории вероятностей по природе приспособлены только для исследования массовых случайных явлений. Они не дают возможности предсказать исход отдельного случайного явления, но позволяют предсказать средний суммарный результат массы аналогичных опытов, конкретный результат каждого из которых остается неопределенным.

**1. Плотность распределения случайной величины**

**.1 События и случайные величины**

Любая наука, развивающая общую теорию какого-либо круга явлений, содержит ряд основных понятий, на которых она базируется. Такие основные понятия существуют и в теории вероятностей. В качестве первого введем понятие события.

Под событием в теории вероятностей понимается всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Примеры:

) Появление герба при бросании монеты;

) Появление 3-х гербов при бросании монеты;

) Попадание в цель при выстреле.

Чтобы количественно сравнивать между собой события по степени их возможности, очевидно, нужно с каждым событием связать определенное число, которое тем больше, чем более возможно событие. Такое число называется вероятностью события.

Таким образом, мы ввели в рассмотрение второе основное понятие теории вероятностей - понятие вероятности события. Вероятность события есть численная мера степени объективной возможности события.

Несколько событий образуют полную группу событий, если в результате опыта непременно должно появиться хотя бы одно из них.

Примеры:

) Выпадение герба и выпадение цифры при бросании монеты;

) Попадание и промах при выстреле.

Несколько событий называются несовместными, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Несколько событий называются равновозможными, если ни одно из них не является объективно более возможным, чем другое.

Существуют группы событий, обладающие всеми тремя свойствами: они образуют полную группу событий, несовместны и равновозможны. События, образующие такую группу, называются случаями.

Примеры:

) Появление герба цифры при бросании монеты;

) Появление 1,2,3,4,5,6 очков при бросании игральной кости.

Схема случаев по преимуществу имеет место в искусственно организованных опытах, в которых заранее и сознательно обеспечена одинаковая возможность исходов опыта. Для таких опытов возможен непосредственный подсчет вероятностей, основанный на оценке доли так называемых благоприятных случаев в общем числе случаев.

Случай называется благоприятным некоторому событию, если появление этого случая влечет за собой появление этого события.

Если опыт сводится к схеме случаев, то вероятность события  в данном опыте можно оценить по относительной доле благоприятных случаев. Вероятность события  вычисляется как отношение числа благоприятных случаев к общему числу случаев:

, (1)

где  - вероятность события ;  - общее число случаев;  - число случаев благоприятных событию .

Так как число благоприятных случаев всегда заключено между 0 и , то вероятность события, вычисленного по формуле (1), всегда есть рациональная правильная дробь:

.

Формула (1), так называемая классическая формула для вычисления вероятностей.

Случайная величина - это величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, при этом неизвестно заранее какое именно.

Случайные величины, принимающие только отдельные друг от друга значения, называются дискретными случайными величинами.

Примеры:

1) Число попаданий при трех выстрелах;

) Число звонков поступивших на телефонную станцию за сутки;

) Частота попаданий при 10 выстрелах;

Случайные величины, возможные значения которых непрерывно заполняют некоторый промежуток, называются непрерывными случайными величинами.

Примеры:

) Абсцисса точки попадания при выстреле;

) Ошибка взвешивания тела на аналитических весах.

**1.2 Функция распределения и её свойства**

дисперсия математический числовой

Непрерывная случайная величина имеет бесчисленное множество значений, сплошь заполняющих некоторый промежуток, так называемое несчетное множество. Каждое отдельное значение непрерывной случайной величины обычно не обладает никакой отличной от нуля вероятностью. Различные области возможных значений случайной величины все же не являются одинаково вероятными, и для непрерывной величины существует распределение вероятностей.

Для количественной характеристики этого распределения вероятностей удобно воспользоваться не вероятностью события, а вероятностью события, где  - некоторая текущая переменная. Вероятность этого события, очевидно, зависит от , есть некоторая функция от . Эта функция называется функцией распределения случайной величины  и обозначается:



Функцию распределения  иногда называют также интегральной функцией распределения или интегральным законом распределения.

Общие свойства функции распределения:

. Функция распределения  иногда есть неубывающая функция своего аргумента, при  .

2. 

3. 

График функции распределения  в общем случае представляет собой график неубывающей функции, значения которой начинаются от 0 и доходят до 1, причем в отдельных точках функция может иметь скачки (рис. 1).



Рис. 1

**1.3 Функция плотности распределения**

Пусть имеется случайная величина  c непрерывной и дифференцируемой функцией распределения. Вычислим вероятность попадания этой случайной величины на отрезок от  до  то есть приращение функции распределения:

.

Рассмотрим среднюю вероятность (т.е. отношение),приходящуюся на единицу длинны на этом участке и будем приближать к нулю. В пределе получаем производную от функции распределения (далее).

.

Функция  называется плотностью функции распределения непрерывной случайной величины  или дифференциальным законом распределения случайной величины.

Производная от функции распределения характеризует плотность,с которой распределяются значения случайной величины в данной точке. Плотность распределения, так же как и функция распределения, есть одна из форм закона распределения. В противоположность функции распределения эта форма не является универсальной: она существует только для непрерывных случайных величин.

Кривая распределения **-** график изображающий плотность распределения случайной величины.



Рис. 2



Рис. 3

Элемент вероятности **-** вероятность попадания случайной величины с плотностью распределения  на элементарный участок , примыкающий к точке . С точки зрения геометрии это площадь элементарного прямоугольника опирающегося на отрезок .

Вероятность попадания случайной величины  на отрезок от  до  равна сумме элементов на всем участке, то есть интегралу вида:

.

Выражая функцию распределения через плотность, по определению получаем:

.

Из этого следует, что:

.

Геометрически является площадью кривой распределения, лежащей левее точки .

Основные свойства плотности распределения:

1.



2.



Геометрически основные свойства плотности распределения означают, что:

) Вся кривая распределения лежит не ниже оси абсцисс;

) Полная площадь, ограниченная кривой распределения с осью абсцисс равна единице.

**2. Числовые характеристики случайных величин**

**.1 Математическое ожидание**

Рассмотрим дискретную случайную величину, имеющую возможные значения  с вероятностями. Нам требуется охарактеризовать каким-то числом положение значений случайной величины на оси абсцисс с учетом того, что эти значения имеют различные вероятности. Для этой цели естественно воспользоваться так называемым средним взвешенным из значений, таким образом, мы вычислим среднее значение случайной величины, которое мы обозначим 



Это среднее взвешенное значение называется математическим ожиданием.

Математическим ожиданием случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на вероятности этих значений.

Для непрерывной величины  математическое ожидание выражается интегралом:



Где - плотность распределения величины.

Свойства:

1. Математическое ожидание постоянной равно этой постоянной.

.

2. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий.

.

Из этого следует, что математическое ожидание суммы конечного числа случайных величин равно сумме их математических ожиданий.

.

. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин  и  равно произведению математических ожиданий этих величин.

.

Из этого следует, что постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания:

.

Модой случайной величины называется ее наиболее вероятное значение. Термин наиболее вероятное значение, применим только к прерывным величинам; для непрерывной величины модой является то значение, в котором плотность вероятности максимальна.

Медианой случайной величины  называется такое ее значение , для которого одинаково вероятно, окажется ли случайная величина меньше или больше .

.

**2.2 Дисперсия**

Дисперсией  называется математическое ожидание квадрата отклонения случайных величин от математического ожидания:



Для непосредственного вычисления дисперсии служат формулы:

.

.

Дисперсия случайной величины есть характеристика рассеивания, разбросанности значений случайной величины около ее математического ожидания.

Если обратиться к механической интерпретации, то дисперсия представляет собой не что иное, как момент инерции заданного распределения масс относительно математического ожидания.

Дисперсия случайной величины имеет размерность квадрата случайной величины. Для наглядной характеристики рассеивания удобнее пользоваться величиной, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины. Для этого из дисперсии извлекают квадратный корень. Полученная величина называется средним квадратическим отклонением случайной величины. Среднее квадратическое отклонение обозначается :



Некоторые свойства дисперсии:

. Дисперсия постоянной величины равна нулю.

. Постоянную величину можно вынести за знак дисперсии, предварительно возведя ее в квадрат:



. Дисперсия суммы независимых случайных величин  и  равна сумме их дисперсий:

.

Из этого следует если  - случайные величины, каждая из которых независима от суммы остальных, то



4. 

**2.3 Моменты**

Начальным моментом - го порядка случайной величины  называется математическое ожидание - ой степени этой случайной величины.

.

Начальным моментом - го порядка дискретной случайной величины является сумма вида:

.

Для непрерывной случайной величины  начальным моментом - го порядка является интеграл:

.

**Заключение**

Таким образом, в работе были рассмотрены основные понятия, связанные с непрерывными случайными величинами. Было показано, что случайные величины могут быть описаны с помощью функции плотности. Также был рассмотрен вопрос о числовых характеристиках случайных величин и их свойствах.

**Литература**

1. Е.С. Венцтель «Теория вероятностей» - «Наука», 1969.