Лабораторная работа

Теория погрешностей

Задача 1

Дана бесконечно убывающая геометрическая прогрессия: . Определить номер  первого члена этой прогрессии, для которого, и указать само значение . Используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, найти  Затем, вычисляя частичные суммы , определить минимальное число  при котором величина  приближающая  содержит  верных цифр.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

. Задать последовательность значений  с помощью формулы общего члена прогрессии.

. Решая неравенство  найти номер  члена этой последовательности, модуль которого меньше 1.

Вычислить само значение 

. Найти сумму ряда  аналитически (по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии).

. Вычислить значения частичных сумм  ряда  при значениях

Для каждого  найти величину абсолютной погрешности  и количество верных цифр в . Определить при каком минимальном значении N=M частичная сумма  содержит  верных цифр.

. Вычислить относительную погрешность величины 

. Оформить отчет по задаче.

Задача 2

Для пакета MATHCAD найти значения машинного нуля, машинной бесконечности, машинного эпсилон.

Задача 3

Задана функция . Требуется вычислить значение функции в точкеи исследовать поведение погрешностей в зависимости от погрешности аргумента.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

. Раскрыть определитель и получить вид функции . Вычислить значение функции в точке .

. Произвести теоретическую оценку абсолютной погрешности функции в зависимости от погрешности аргумента  по формуле . Считать, что x0 получено в результате округления по дополнению.

. Вычислить определитель матрицы при нескольких различных значениях аргумента в пределах заданной точности.

.Сравнить полученные результаты (см. ПРИЛОЖЕНИЕ 1.C).

. Найти относительную погрешность каждого результата задачи.

Приложение 1.А

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ 1

ВНИМАНИЕ! Номер варианта для лабораторных работ вычисляется по следующей формуле:

)  mod (52) для групп 9-11;

)  mod (50) для групп 12-14

(здесь  - номер группы, а  - индивидуальный номер студента по журналу).

Таблица к задаче 1.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|      |  |  |  |  |  |  |  |

1.1.1 



1.1.14



1.1.27



1.1.40



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |

1.1.2 



1.1.15



1.2.28



1.1.41



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |

1.1.3 

1.1.16



1.1.29

1.1.42



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |

1.1.4 



1.1.17



1.1.30



1.1.43



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |

1.1.5 



1.1.18



1.1.31 



1.1.44



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |

1.1.6 



1.1.19

1.1.32



1.1.45

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |

1.1.7 



1.1.20



1.1.33



1.1.46



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |

1.1.8 



1.1.21



1.1.34



1.1.47



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |

1.1.9 



1.1.22



1.1.35



1.1.48



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |

1.1.10 



1.1.23



1.1.36

1.1.49



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |

1.1.11 



1.1.24



1.1.37



1.1.50



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |

1.1.12 



1.1.25



1.1.38



1.1.51



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |

1.1.13 



1.1.26



1.1.39



1.1.52

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |

Таблица к задаче 1.3

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|      |  |  |  |  |  |  |  |

1.3.1  1.3.14 1.3.27 1.3.40

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |

1.3.2 

1.3.15

1.2.28

1.3.41

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |

1.3.3 

1.3.16

1.3.29

1.3.42

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |

1.3.4 

1.3.17

1.3.30

1.3.43

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |

1.3.5 

1.3.18

1.3.31

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1.3.44  |  |  |  |  |  |  |

1.3.6 

1.3.19

1.3.32 1.3.45

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |

1.3.7 

1.3.20

1.3.33

1.3.46

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |

1.3.8 

1.3.21

1.3.34

1.3.47

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |

1.3.9 

1.3.22

1.3.35

1.3.48

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |

1.3.10  1.3.23

1.3.36

1.3.49

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |

1.3.11 

1.3.24

1.3.37

1.3.50

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |

1.3.12 

1.3.25

1.3.38

1.3.51

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |

1.3.13  1.3.26

1.3.39

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1.3.52  |  |  |  |  |  |  |

Приложение 1.В

Ниже приведен фрагмент оформления содержательной части отчета по лабораторной работе 1.

Задача 1.1.0. Дана бесконечно убывающая геометрическая прогрессия: , где , . Определить номер  первого члена этой прогрессии, для которого, и указать само значение . Используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, найти  Затем, вычисляя частичные суммы  при  определить минимальное число  при котором величина  приближающая  содержит  верных цифр. Вычислить относительную погрешность величины 

. Аналитическое решение задачи

Воспользуемся известными формулами для геометрической прогрессии:

) -й (общий) член геометрической прогрессии имеет вид: 

) сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии: 

Номер  для которого найдём, решив неравенство:

    

Наименьшее целое число, удовлетворяющее последнему неравенству, равно 

Убедимся в том, что номер  найден верно (учтем 6 знаков после запятой):





Первая часть задачи решена.

. Теоретический материал

Пусть  - точное значение,  - приближенное значение некоторой величины.

 1) Абсолютной погрешностью приближенного значения  называется величина .

) Относительной погрешностью значения  (при  называется величина .

 Так как значение  (как правило) неизвестно, чаще получают оценки погрешностей вида:

 

При этом величины  и  называют верхними границами (или просто границами) абсолютной и относительной погрешностей.

 Значащую цифру числа называют верной, если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы разряда, соответствующего этой цифре.

Нас интересует значение суммы  бесконечно убывающей геометрической прогрессии . Приближённое значение этой суммы даёт её -ая частичная сумма  Абсолютную погрешность такого приближения найдём по формуле 

. Результаты вычислительного эксперимента значение частичной величина абсолютной количество верных суммы ряда погрешности значащих цифр

  0

  1

  4

  14

Так как по условию результат должен содержать 9 верных цифр, то величина абсолютной погрешности не должна превышать значения . Для определения наименьшего значения  проведем дополнительные эксперименты:

  8

  8

  8

  9

Наконец, вычислим относительную погрешность найденного результата: 

. ОТВЕТ

) номер  первого из членов заданной прогрессии, для которого, равен 

) при этом 

) сумма геометрической прогрессии, вычисленная по аналитической формуле, равна 

) частичная сумма  дает 9 верных значащих цифр;

) относительная погрешность этого значения равна 

Приложение 1.С

Задача 1.3.0. Задана функция . Требуется вычислить значение функции в точкеи исследовать

поведение погрешностей в зависимости от погрешности аргумента.

Пусть определитель матрицы имеет вид: . Тогда, раскрывая определитель, получим

следующий вид функции: . Вычислим определитель в точке : . Для получения теоретической оценки учтем, что , то есть погрешность аргумента  для данного варианта равно 0.5. Производная функции монотонно убывает, поэтому (см график).







Таким образом, теоретическая оценка получена: . Сравним теоретическую оценку с погрешностью, полученной с помощью вычислительного эксперимента.

,

, .

 

Получено хорошее соответствие с теоретической оценкой. Заметим, что величина относительной погрешности невелика, например, в последнем эксперименте: .

погрешность аргумент прогрессия

Литература

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копчёнова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. - М.: Высшая школа, 1994.