Содержание

Введение

. Классификация точек регулярной поверхности

. Выпуклые тела и поверхности

.1 Основные понятия

.2 Кривизна

.3 Удельная кривизна выпуклой поверхности

.4 Неизгибаемость сферы

.5 Сфера как единственная овальная поверхность постоянной средней кривизны

. Седловые поверхности

.1 Основные понятия и свойства

.2 Неограниченность седловых трубок

.3 Проблема Плато

.4 Полные седловые поверхности со взаимно однозначным сферическим изображением

Заключение

Список литературы

Введение

Изложению исследования внешней геометрии поверхностей с постоянным типом точек посвящена данная работа. В неё вошли вопросы, относящиеся к выпуклым и седловым поверхностям.

Проблема данного исследования носит актуальный характер в современных условиях. Об этом свидетельствует частое изучение поднятых вопросов, их исследованию посвящено множество работ. В основном материал, изложенный в учебной литературе, носит общий характер.

Дифференциальная геометрия на протяжении XIX в. развивалась в тесном контакте с механикой и анализом, в особенности с теорией дифференциальных уравнений в частных производных. Так как в этот период в анализе много занимались вопросами формального интегрирования, то и для дифференциальной геометрии была естественной проблематика формально-аналитического направления. Основным объектом теории поверхностей были регулярные поверхности, рассматриваемые "в малом".

В XX в., даже в начале его, вопросы формального характера уже никак не могли считаться актуальными для механики и анализа. Между тем в теории поверхностей подавляющее большинство исследований всё ещё продолжало традиции XIX в. Таким образом, между классической теорией поверхностей, с одной стороны, анализом и механикой - с другой, образовался разрыв. Более современные проблемы и качественные методы анализа и механики оказались чуждыми классической теории поверхностей. И внутри классической теории поверхностей наметилась новая ветвь, предметом которой оставались регулярные поверхности, но исследуемые "в целом"; эта ветвь также смыкалась с современным анализом. Но здесь весьма существенно заметить следующее: в то время как те отделы геометрии "в целом", где изучались свойства твердой поверхности, уже давно располагали довольно развёрнутой системой общих методов (по крайней мере, для выпуклых поверхностей), исследования деформаций поверхностей и связей между их внутренними и внешними свойствами ("в целом") носили отрывочный характер. Всё это объясняется тем, что геометры, работавшие в области геометрии "в целом", подходили к задачам этой области всё ещё со средствами классического анализа, который здесь в большинстве случаев оказывается мало пригодным. Для успешного развёртывания содержательной теории поверхностей оказалось настоятельно необходимым построить систему общих прямых методов исследования внутренних свойств поверхности. Это и было сделано А. Д. Александровым (при участии его учеников И. М. Либермана и С. П. Оловянишникова). Выпуклые поверхности, естественно, представляют собой особенно благоприятное поле для конкретных и геометрически наглядных результатов. Но дело не только в отдельных результатах. Для развития каждого отдела математики важен общий уровень его проблем и методов, важно, чтобы этот уровень соответствовал прогрессу науки. Для развития теории поверхностей важно, чтобы она не была изолированной, замкнутой в себе дисциплиной. Исследования А. Д. Александрова, А.В.Погорелова, А.Л.Вернера и других математиков потому, именно, имеют большое значение для теории поверхностей, что они открывают в ней новые области проблем и соответствующих им методов, идущих в ногу с прямыми методами современного анализа.

Актуальность настоящей работы обусловлена, с одной стороны, большим интересом к этой теме в современной науке, с другой стороны, ее недостаточной разработанностью. Рассмотрение вопросов связанных с данной тематикой носит как теоретическую, так и практическую значимость.

Целью исследования является изучение теоретических аспектов темы "Внешняя геометрия поверхностей с постоянным типом точек" с точки зрения новейших отечественных и зарубежных исследований по сходной проблематике.

1. Классификация точек регулярной поверхности

Поверхность S, заданную векторным уравнением , будем называть -регулярной, если в области задания параметров D функция  имеет непрерывные производные порядка k (k2) и во всех точках области D выполняется неравенство .

Второй квадратичной формой поверхности S называется скалярное произведение векторов  и n [13, стр.81]:

. (1)

Нетрудно заметить, что в каждой точке поверхности S форма (1) является квадратичной формой относительно дифференциалов  и .

Для коэффициентов второй квадратичной формы приняты обозначения

,

что позволяет записать ее в следующем виде: .

Пусть S - регулярная поверхность и  - ее радиус-вектор.

Выберем на поверхности S некоторую точку  и рассмотрим плоскость , которая касается поверхности S в этой точке.

Отклонение произвольной точки  поверхности S от плоскости  определим формулой

, (2)

где  - единичный вектор нормали к поверхности в точке .

Это отклонение, взятое по абсолютной величине, равно расстоянию от точки  до плоскости . Отклонение положительно, если точка  и конец вектора  лежат по одну сторону от плоскости  и отрицательно, если эти точки лежат по разные стороны от плоскости  (рисунок 1).

Обратимся к формуле (2). Разность  допускает следующее представление:



где  при .

Умножим обе части равенства (3) скалярно на вектор . Тогда, положив

,

получим, что

. (4)

Отметим, что коэффициенты  и  в формуле (4) вычислены в точке .

Таким образом, мы получили для отклонения  следующее представление:

, (5)

где через  обозначена вторая квадратичная форма поверхности, вычисленная в точке , и  при .



Используем полученную формулу (5) для изучения строения поверхности S вблизи точки .

Вычислим дискриминант второй квадратичной формы



в точке . Возможны следующие случаи.

)  - вторая квадратичная форма поверхности в точке  является знакоопределенной.



Зафиксируем в точке  некоторое направление на поверхности; для определенности .

Тогда любое другое направление на поверхности в точке  можно задавать при помощи угла , который оно образует с выбранным направлением  (рис.2).

Положим . Тогда

 (6)

Нетрудно показать, что



где постоянная



и в силу условия  положительна.

Таким образом, неравенство



выполняется независимо от выбора угла .

Так как порядок стремления к нулю при  второго слагаемого  в правой части формулы (5) выше двух, то из последней оценки можно сделать следующий вывод.

Отклонение  сохраняет знак, совпадающий со знаком второй квадратичной формы , для всех достаточно малых значений  независимо от выбора направления на поверхности.



Это означает, что все точки поверхности S, достаточно близкие к точке  располагаются по одну сторону от касательной плоскости  поверхности S в этой точке. Такая точка поверхности называется эллиптической (рис.3)

)  - вторая квадратичная форма поверхности в точке  является знакопеременной.

Покажем, что в этом случае в точке  можно указать два коллинеарных направления на поверхности, обладающих следующими свойствами:

а) для значений дифференциалов, определяющих эти направления, вторая квадратичная форма поверхности, вычисленная в точке , обращается в нуль;

б) все остальные направления на поверхности в точке  разбиваются на два класса - для дифференциалов, определяющих направления одного из классов, вторая квадратичная форма  положительна и для другого отрицательна.

Пусть некоторое направление  положительного класса задается углом . В соответствии с формулой (6) имеем

,

где .

Как видно из формулы (5), знак отклонения  для всех достаточно малых значений  в рассматриваемом направлении  совпадает со знаком второй квадратичной формы . Следовательно, если точка  поверхности S достаточно близка к точке , то это отклонение положительно.



Рассуждая аналогично, можно указать точки на поверхности, близкие к точке , для которых отклонение отрицательно (рис.4).

Приведенные рассуждения показывают, что вблизи точки , поверхность S располагается по разные стороны от касательной плоскости . При этом проекции точек поверхности, отклонения, которых положительны, на касательной плоскости  заполняют множество, отмеченное на приведенном рисунке (рис.5).



В рассматриваемом случае точка  называется гиперболической точкой поверхности S.

) , но отличен от нуля хотя бы один из коэффициентов .

Пусть для определенности . Тогда вторая квадратичная форма поверхности S в точке  может быть записана в следующем виде:

.

Тем самым в зависимости от знака  форма  либо неотрицательна () либо неположительна (). При этом на поверхности S в точке  можно указать направление , такое, что определяющие его дифференциалы  и  обращают вторую квадратичную форму  в нуль. Для всех других направлений на поверхности в точке  форма  имеет один и тот же знак (совпадающий со знаком ) (рис.6).

В этом случае точка  называется параболической точкой поверхности S.

) .

Такая точка  называется точкой уплощения поверхности. Расположение точек поверхности, близких к точке уплощения, относительно касательной плоскости поверхности в этой точке может быть чрезвычайно разнообразным (рис.7).



В зависимости от типа точек выделяются следующие виды поверхности:

· если все точки поверхности эллиптические, то поверхность является выпуклой;

· если все точки поверхности гиперболические, то поверхность является седловой.

2. Выпуклые тела и поверхности

.1 Основные понятия

Множество М в трехмерном евклидовом пространстве называется выпуклым, если оно вместе с любыми двумя его точками X и Y содержит соединяющий их прямолинейный отрезок (рис.8). Замкнутое плоское выпуклое множество с внутренними точками называется выпуклой областью.



Связная часть границы выпуклой области называется выпуклой кривой. Граница конечной выпуклой области называется замкнутой выпуклой кривой. Замкнутая выпуклая кривая гомеоморфна окружности. Прямая g, проходящая через точку Х границы выпуклой области G, называется опорной, если вся область располагается в одной из полуплоскостей, определяемых этой прямой. Через каждую граничную точку выпуклой области проходит по крайней мере одна опорная прямая.



Если выпуклая кривая  является границей выпуклой области G или частью ее границы, то опорная прямая в каждой точке кривой  к области G называется также опорной прямой кривой .

Точки выпуклой кривой подразделяются на гладкие и угловые. Именно, точка Х выпуклой кривой  называется гладкой, если через эту точку проходит единственная опорная прямая. В противном случае точка Х называется угловой точкой. В угловой точке опорные прямые заполняют некоторый вертикальный угол с вершиной в этой точке, причем стороны этого угла тоже являются опорными прямыми (рис. 10).



Рис.10

Всякая выпуклая кривая является спрямляемой, т.е. имеет определенную длину. Если замкнутая кривая  охватывает выпуклую кривую , то длина  не превосходит длины .

Выпуклым телом называется замкнутое выпуклое множество в пространстве, имеющее внутренние точки. Для того, чтобы замкнутое выпуклое множество было выпуклым телом, необходимо и достаточно, чтобы не существовало плоскости, содержащей это множество. Пересечение (общая часть) любой совокупности выпуклых тел, если оно содержит внутренние точки, тоже является выпуклым телом.

Область (связное открытое множество) на границе выпуклого тела называется выпуклой поверхностью. Связная компонента границы выпуклого тела называется полной выпуклой поверхностью. Если исключить два тривиальных случая, когда выпуклое тело есть все пространство или область между двумя параллельными плоскостями, то полную выпуклую поверхность можно определить просто как границу выпуклого тела. Граница конечного выпуклого тела гомеоморфна сфере и называется замкнутой выпуклой поверхностью. Всякая полная выпуклая поверхность гомеоморфна либо плоскости, либо сфере, либо цилиндру. В последнем случае поверхность сама является цилиндром.

Подобно тому как в случае выпуклых плоских областей, для выпуклых тел вводится понятие опорной плоскости. Именно, плоскость , проходящая через граничную точку Х тела К, называется опорной в этой точке Х, если все точки тела расположены по одну сторону от плоскости , т.е. в одном из определяемых ею полупространств. Через каждую граничную точку выпуклого тела проходит по крайней мере одна опорная плоскость. Единичный вектор, перпендикулярный опорной плоскости и направленный в полупространство, не содержащее точек тела, называется внешней нормалью к этой опорной плоскости.

Выпуклое тело V, составленное из полупрямых, исходящих из точки S, называется выпуклым конусом; при этом исключается тот случай, когда тело V совпадает со всем пространством. Определяемое таким образом понятие выпуклого конуса содержит в себе как частный случай двугранный угол и полупространство. Поверхность выпуклого конуса обычно также называют выпуклым конусом. В указанных двух частных случаях говорят о вырождении конуса как поверхности в двугранный угол или плоскость.

С каждой точкой S границы выпуклого тела К естественным образом связывается некоторый конус V(S), образуемый полупрямыми, исходящими из точки S и пересекающими тело К по крайней мере в одной точке, отличной от S (рис.11).



Этот конус называется касательным конусом в точке S, а его поверхность - касательным конусом выпуклой поверхности, ограничивающей тело.

В зависимости от вида касательного конуса точки выпуклой поверхности подразделяются на конические, ребристые и гладкие. Именно точка Х выпуклой поверхности называется конической, если касательный конус V(X) в этой точке не вырождается. Если же касательный конус V(X) вырождается в двугранный угол или плоскость, то Х называется ребристой или соответственно гладкой точкой. Негладкие точки на выпуклой поверхности представляют собой в некотором смысле исключение. Именно, множество ребристых точек имеет меру нуль, а множество конических точек не более чем счетно.

Простейшим нетривиальным выпуклым телом является выпуклый многогранник - пересечение конечного числа полупространств. Поверхность выпуклого многогранника составлена из выпуклых плоских многоугольников и тоже называется выпуклым многогранником. Многоугольники, из которых составлена поверхность многогранника, называются гранями многогранника, их стороны - ребрами многогранника, а вершины - вершинами многогранника.

В теории выпуклых тел важную роль играет понятие выпуклой оболочки. Выпуклая оболочка множества М представляет собой пересечение всех полупространств, содержащих М. Следовательно, она является выпуклым множеством и притом наименьшим среди всех выпуклых множеств, содержащих М. Каждый выпуклый многогранник есть выпуклая оболочка своих вершин (конечных и бесконечно удаленных), и поэтому однозначно ими определяется.

Для последовательности выпуклых поверхностей определяется понятие сходимости. Говорят, что последовательность выпуклых поверхностей  сходится к выпуклой поверхности F, если любое открытое множество G одновременно пересекает или не пересекает поверхность F и все поверхности  при . Любую выпуклую поверхность можно представить как предел выпуклых многогранников или регулярных выпуклых поверхностей.

Бесконечные совокупности выпуклых поверхностей обладают важным свойством компактности, которое состоит в том, что из любой последовательности полных выпуклых поверхностей, не удаляющихся в бесконечность, всегда может быть выделена сходящаяся подпоследовательность с пределом в виде выпуклой поверхности, может быть, вырождающейся (в дважды покрытую плоскую область, прямую, полупрямую или отрезок).

Отметим весьма употребительное свойство сходимости опорных плоскостей сходящейся последовательности выпуклых поверхностей. Пусть  - последовательность выпуклых поверхностей, сходящихся к выпуклой поверхности F,  - точка на поверхности  и  - опорная плоскость в этой точке. Тогда, если последовательность точек  сходится к точке Х поверхности F, и последовательность опорных плоскостей  сходится к плоскости , то эта плоскость является опорной для поверхности F в точке Х. Отсюда, в частности, следует, что если последовательность точек  на выпуклой поверхности F сходится к точке Х этой поверхности, и опорные плоскости  в точках  сходятся к плоскости , то эта плоскость будет опорной в точке Х.

.2 Кривизна

Пусть G - какая-либо область на поверхности F. Будем проводить во всех точках области G все касательные (опорные) плоскости к поверхности F и будем проводить из центра некоторой единичной сферы S радиусы, направленные параллельно внешним нормалям к этим опорным плоскостям. Множество точек на сфере S, образуемое концами проведенных таким образом радиусов, называется сферическим изображением области G. Площадь этого сферического изображения области G будет называться внешней кривизной этой области (рис.12) [1, стр.40].



При сферическом изображении выпуклой поверхности направление обхода сферического образа площадки на поверхности совпадает с направлением обхода самой этой площадки. Следовательно, кривизна выпуклой поверхности всегда положительное число.

Оказывается, внешняя кривизна есть вполне аддитивная функция на выпуклой поверхности, определенная для всех борелевских множеств.

Доказательство этой теоремы опирается на следующие два предложения:

.Сферическое изображение замкнутого множества на выпуклой поверхности является замкнутым множеством.

.Множество тех точек сферического изображения выпуклой поверхности, у каждой из которых есть по крайней мере два прообраза на поверхности, имеет площадь, равную нулю.

Для внешних кривизн выпуклых поверхностей имеют место следующие теоремы о сходимости:

.Если последовательность выпуклых поверхностей  сходится к выпуклой поверхности F и последовательность замкнутых множеств , лежащих на поверхностях , сходится к замкнутому множеству М на F, то , где  обозначает внешнюю кривизну соответствующего множества.

.Пусть последовательность выпуклых поверхностей  сходится к выпуклой поверхности F,  и G - открытые множества на поверхностях  и F, а  и  - замыкания этих множеств. Тогда, если множества  сходятся к , а множества  сходятся к F-G, и внешние кривизны множеств  сходятся к внешней кривизне , то внешние кривизны  сходятся к внешней кривизне G.

Если Х - коническая точка поверхности F, то сферическое изображение ее одной образует на сфере S целую область (рис.13). Если L есть непрямолинейное ребро поверхности, то его сферическое изображение также покрывает на сфере S целую область (рис.14).

Внутренняя кривизна определяется как функция множества на поверхности, т.е. каждому множеству М из некоторого класса множеств ставится в соответствие число  - кривизна множества М. В соответствии с терминологией, принятой в дифференциальной геометрии, следовало бы говорить о полной (или интегральной) внутренней кривизне, но ради краткости опустим оба этих прилагательных, что не приведет к недоразумениям, так как одним словом "кривизна" мы не будем называть ничего другого.



Треугольником будем называть фигуру, гомеоморфную кругу и ограниченную тремя кратчайшими. Сами кратчайшие называются сторонами, а точки, где они попарно сходятся, - вершинами треугольника [1,35].

Внутренняя кривизна  определяется сначала для основных множеств - точек, открытых кратчайших и открытых треугольников - следующим образом.

Если М - точка и  - полный угол вокруг нее на поверхности, то внутренняя кривизна М равна .

Если М - открытая кратчайшая, т.е. кратчайшая с исключенными концами, то .

Если М - открытый треугольник, т.е. треугольник с исключенными сторонами и вершинами, то , где  - углы треугольника.

Далее внутренняя кривизна определяется для элементарных множеств, т.е. таких множеств, которые представляются в виде теоретико-множественной суммы основных множеств, так что .

Для таких множеств .

Доказывается, что определяемая таким образом внутренняя кривизна элементарных множеств не зависит от способа представления множества в виде суммы основных. Доказательство опирается на следующую теорему.

Теорема: Пусть Р - внутренняя часть геодезического многоугольника с углами  и эйлеровой характеристикой . Тогда кривизна Р равна  [11, стр.26].

Очевидно, внутренняя кривизна элементарных множеств на выпуклой поверхности является аддитивной функцией.

До сих пор внутренняя кривизна выпуклой поверхности была определена только для элементарных множеств. Определим ее для замкнутых множеств как точную нижнюю грань внутренних кривизн элементарных множеств, содержащих данное замкнутое множество. Наконец, для любого борелевского множества внутреннюю кривизну определим как точную верхнюю грань внутренних кривизн содержащихся в нем замкнутых множеств.

Напомним, что борелевскими называются множества, которые получаются из замкнутых и открытых множеств применением не более чем счетной совокупности операций объединения и пересечения. Очевидно, объединение счетного множества борелевских множеств будет борелевским множеством [2, стр.172].

То, что определение внутренней кривизны для замкнутых и вообще борелевских множеств не вступает в противоречие с введенным ранее определением внутренней кривизны для элементарных множеств, гарантируется следующей фундаментальной теоремой.

Теорема: Внутренняя кривизна всякого борелевского множества на выпуклой поверхности равна его внешней кривизне, т.е. площади сферического изображения.

.3 Удельная кривизна выпуклой поверхности

Каждая область G на выпуклой поверхности имеет определенную площадь S(G) и кривизну . Отношение  называется удельной кривизной области G. Если для всех областей G на выпуклой поверхности удельная кривизна ограничена некоторой постоянной, то такая поверхность называется поверхностью ограниченной кривизны.

Свойство поверхности иметь ограниченную удельную кривизну сохраняется при переходе к пределу. Именно поэтому, имеет место следующая теорема.

Теорема: Если последовательность выпуклых поверхностей  с равномерно ограниченными удельными кривизнами сходится к поверхности F, то эта поверхность является поверхностью ограниченной кривизны [11, стр.39].

Доказательство основано на теоремах сходимости площадей и кривизн сходящейся последовательности выпуклых поверхностей.

Удельная кривизна выпуклой поверхности в точке Х, т.е. предел , когда область G стягивается к точке Х, называется гауссовой кривизной поверхности в этой точке. Легко доказывается, что если гауссова кривизна существует в каждой точке поверхности, то она непрерывна.

Поверхности ограниченной кривизны обладают рядом свойств регулярных выпуклых поверхностей. В частности, из каждой точки выпуклой поверхности ограниченной кривизны в любом направлении можно провести кратчайшую на расстояние, зависящее только от удельной кривизны поверхности.

Существование кратчайшей из данной точки по любому направлению на длину  позволяет ввести в окрестности этой точки полярные координаты . Если, кроме того, поверхность имеет определенную гауссову кривизну в каждой точке, то метрику поверхности в параметризованной окрестности можно задать линейным элементом , где коэффициент G является непрерывной дважды дифференцируемой по r функцией. Связь между этим коэффициентом и гауссовой кривизной поверхности устанавливается известной формулой .

Если гауссова кривизна поверхности постоянна и больше нуля, то, как легко видеть, коэффициент G, удовлетворяя уравнению , должен иметь вид .

Следовательно, такая поверхность локально изометрична сфере радиуса .

Если в треугольнике  на выпуклой поверхности удельная кривизна , то его углы не меньше (не больше) соответствующих углов треугольника  с теми же сторонами на сфере радиуса .

Если в треугольнике  на выпуклой поверхности удельная кривизна , то площадь S этого треугольника не меньше (не больше) площади треугольника  с теми же сторонами на сфере радиуса . Более того, имеют место оценки:

,

если в треугольнике  удельная кривизна , и

,

если в треугольнике  удельная кривизна .

Пусть  и  - две кратчайшие, исходящие из точки О на выпуклой поверхности. Пусть  и  - переменные точки на  и , , ,  и  - угол в треугольнике со сторонами , противолежащей стороне , на сфере  радиуса . Говорят, что метрика  поверхности удовлетворяет условию К-выпуклости, или является К-выпуклой, если для любых кратчайших  и  угол  есть невозрастающая функция во всяком интервале , , в котором существует кратчайшая . Говорят, что метрика  удовлетворяет условию К-вогнутости, или является К-вогнутой, если  является неубывающей функцией по  в таком же интервале (рис. 15). Имеет место следующая теорема.





Теорема: Если на выпуклой поверхности удельная кривизна , то на этой поверхности выполняется условие К-выпуклости (К-вогнутости).

Точки выпуклой поверхности могут быть трех родов: конические, где касательный конус не вырождается и, следовательно, полный угол меньше , ребристые - с касательным конусом, вырождающимся в двугранный угол, и плоские, где касательный конус вырождается в плоскость. Очевидно, на поверхности ограниченной кривизны не может быть конических точек, так как в таких точках удельная кривизна равна бесконечности. Ребристые же точки могут быть и на поверхности ограниченной кривизны. Однако имеет место следующая теорема.

Теорема: Если на выпуклой поверхности удельная кривизна любой достаточно малой области, содержащей точку А, не превосходит какого-нибудь постоянного числа, то точка А либо гладкая, либо через нее проходит прямолинейное ребро поверхности.

Отсюда как следствие получается, что замкнутая выпуклая поверхность ограниченной кривизны гладкая. Бесконечная полная выпуклая поверхность ограниченной кривизны, в любой конечной части не являющаяся цилиндром, гладкая.

Если через точку А выпуклой поверхности проходит прямолинейный отрезок, то на поверхности имеются сколь угодно малые области, содержащие точку А и имеющие сколь угодно малую удельную кривизну.

Следовательно, если удельная кривизна выпуклой поверхности заключена в положительных пределах для всех областей на поверхности, то такая поверхность гладкая.

.4 Неизгибаемость сферы

Достаточно малый кусок поверхности всегда может быть подвергнут изменению его формы, сохраняющему длины. Не так обстоит дело для поверхности в целом. Уже Миндинг в 1838 г. выставил в качестве догадки предложение, что поверхность сферы в целом обладает жесткостью. Но лишь в 1899 г. Либман обосновал это утверждение. Так как согласно теореме Гаусса при изометрических отображениях мера кривизны остается неизменной, то теорема Либмана может быть сформулирована следующим образом: сфера является единственной замкнутой поверхностью, имеющей постоянную кривизну.

Если не вводить ограничивающих требований правильности, то утверждение это заведомо неверно. В самом деле, если мы отсечем от сферы ее сегмент и заменим это сегмент зеркальным его отображением относительно плоскости сечения, то мы получим "помятую" сферу, которая, хотя и обладает постоянной мерой кривизны, но имеет ребро. Будем впредь предполагать, что имеем дело с аналитическими поверхностями, правильными повсюду.

Если за параметрические линии поверхности мы примем ее линии кривизны, то из формул для главных кривизн



положив в них сперва , а затем , мы получим:

. (1)

Для обратных величин будем иметь:

. (2)

С помощью формул Кодацци вида



и формул (2) мы получим , (3)

отсюда

. (4)

При доказательстве теоремы Либмана мы можем предполагать, что . В самом деле, случай  исключается, потому что эти поверхности имеют прямолинейные образующие и, следовательно, являются заведомо незамкнутыми поверхностями. Точно так же не может существовать замкнутой поверхности, кривизна которой всюду отрицательна: . Действительно, в наивысшей точке такой поверхности мера кривизны должна быть положительна: . Таким образом, остается рассмотреть лишь случай , а в этом случае преобразованием подобия всегда можно сделать  или, что то же, .

Если на нашей поверхности повсюду имеет место соотношение , то все точки поверхности суть точки округления и, следовательно, мы имеем сферу. Если возьмем поверхность, отличную от сферы и получающуюся изгибанием последней, то на такой поверхности заведомо должны существовать точки, для которых . Обе эти величины мы можем считать непрерывными функциями; в силу замкнутости поверхности обе величины  и  достигают на поверхности максимума. Один из этих максимумов во всяком случае больше 1. Пусть, например, величина  достигает в точке  максимума, который больше 1. Тогда для некоторой окрестности точки  мы имеем: , и величина  в точке  достигает минимума. Так как  не является точкой округления, то в окрестности ее существует правильная сеть линий кривизны.

В силу соотношения  мы можем вместо формул (3)-(4) написать уравнения:

. (5)

Интегрируя их, мы получим:

. (6)

Так как элементы дуги линий кривизны  и  выражаются формулами , , то мы имеем , и формулы (6) в силу соотношений  дают:  в окрестности точки .

Так как в точке  величина  достигает максимума, а величина  - минимума, то в этой точке должны иметь место условия:

.

Формулы (3) и (4) тогда дадут нам: . (7)

Подставив  в формулу Гаусса

,

мы получим для точки :

.

Правая часть этой формулы в силу соотношений (7) отрицательна, левая же согласно нашему предположению положительна и равна 1. Итак, допущение, что наша поверхность не сфера, приводит к противоречию. Доказательство завершено.

Полученный результат можно сформулировать также следующим образом: внутри куска поверхности постоянной положительной кривизны для точки, не являющейся точкой округления, ни один из главных радиусов кривизны не может иметь ни максимальной, ни минимальной величины.

Если же в поверхности сферы прорезать сколь угодно малое отверстие, то поверхность может быть изогнута.

.5 Сфера как единственная овальная поверхность постоянной средней кривизны

Теорема, аналогичная предыдущей, имеет место и в том случае, если потребовать, чтобы на поверхности вместо меры кривизны была постоянной средняя кривизна:

.

Эта теорема также доказана Либманом. Замкнутую выпуклую поверхность, которую мы будем считать всюду правильной и аналитической и кроме того всюду обладающей положительной мерой кривизны, мы будем называть овальной поверхностью. Тогда теорема можно сформулировать следующим образом: сфера есть единственная овальная поверхность, имеющая постоянную среднюю кривизну.

Эту теорему можно свести к предыдущей с помощью приема, указанного Бонне. Для этого необходимо предварительно установить следующее предложение: среди поверхностей, параллельных некоторой поверхности постоянной положительной кривизны, существует одна, средняя кривизна которой постоянна, и обратно.

Пусть  есть поверхность, для которой , и пусть  - единичный вектор ее нормали. Тогда параллельная ей поверхность  имеет среднюю кривизну . Действительно, для линий кривизны поверхности  мы имеем согласно формулам Родрига:



Линиям кривизны поверхности  отвечают линии кривизны поверхности , так как . Соответственные главные радиусы кривизны связаны соотношением . Поэтому в силу соотношения  мы имеем:

.

Доказательство прямого утверждения завершено.

Докажем обратное предложение, т.е. среди поверхностей, параллельных некоторой поверхности постоянной средней кривизны, существует поверхность, гауссова кривизна которой постоянна.

Имеем овальную поверхность, средняя кривизна которой удовлетворяет уравнению , а  - единичный вектор ее нормали. Тогда параллельная ей поверхность  имеет гауссову кривизну . Это следует из следующих рассуждений. Для линий кривизны поверхности  мы имеем согласно формулам Родрига:



Линиям кривизны поверхности  отвечают линии кривизны поверхности , так как . Соответственные главные радиусы кривизны связаны соотношением . Поэтому в силу соотношения  мы имеем:

.

Доказательство завершено.

Теорема о жесткости сферы может быть в суженном объеме распространена на произвольные овальные поверхности. Этому распространению мы тоже обязаны Либману. Теорема звучит следующим образом: если изменение, которому подвергается овальная поверхность должно быть непрерывным и изометрическим, то поверхность эта может только перемещаться как твердое тело.

3. Седловые поверхности

.1 Основные понятия и свойства

Седловые поверхности в известном смысле противоположны по своим свойствам выпуклым поверхностям. Как и выпуклые поверхности, они могут быть определены чисто геометрически, а в регулярном случае имеют простую аналитическую характеристику - неположительность гауссовой кривизны.

Пусть F - поверхность, определяемая погружением  двумерного многообразия  в . Говорят, что плоскость P отсекает от F горбушку, если среди компонент прообраза множества F\P в  имеется компонента G с компактным замыканием. Часть  поверхности F, соответствующая этой компоненте G, называется горбушкой. Очевидно, горбушка  будет поверхностью, которая имеет границу , лежащую в плоскости P. Примеры горбушек приведены на рис.16.



Поверхность F в  называется седловой, если она не допускает отсечения горбушек никакой плоскостью. Примерами седловых поверхностей являются однополостный гиперболоид, гиперболический параболоид, любая линейчатая поверхность, катеноид и т.д.

Из определения следует, что среди седловых поверхностей в  нет замкнутых поверхностей.

Определение седловых поверхностей не связано, как и в случае выпуклых поверхностей, ни с какими требованиями регулярности. Это позволяет исследовать нерегулярные седловые поверхности.

Теорема: Для того чтобы поверхность F класса  в  была седловой, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке Х поверхности F ее гауссова кривизна К(Х) была неположительна.

Доказательство.

Необходимость. Пусть F - седловая поверхность. Допустим, что в точке  гауссова кривизна . Тогда некоторая окрестность  точки  на F лежит по одну сторону от касательной плоскости Т к F в точке , причем порядок седлообразности  равен 0. Любая плоскость , параллельная Т, достаточно близкая к Т и лежащая с  по одну сторону от Т, отсекает от F горбушку, что невозможно (рис.17).



Поэтому  везде на F.

Достаточность. Пусть  везде на F. Допустим, что плоскость Р отсекает от F горбушку Ф с границей . Множество Ф компактно в . Поэтому можно взять эллиптический параболоид П, от которого Р отсекает такую горбушку , что Ф лежит между  и Р, причем - пустое множество (рис.18). Рассмотрим семейство параболоидов, полученных из П аффинным сжатием к плоскости Р. В этом семействе найдется параболоид , который имеет с Ф общую точку , но Ф лежит между Р и горбушкой , отсеченной от Ф плоскостью Р. В точке  поверхности F и  касаются, и все нормальные кривизны у F и  в этой точке имеют один знак. Поэтому в точке  гауссова кривизна . Получили противоречие с условием теоремы. Теорема доказана.



Следствие: На каждой горбушке регулярной поверхности существует точка, в которой гауссова кривизна положительна.

Перейдем теперь к построению в  примеров полных поверхностей отрицательной гауссовой кривизны, эйлерова характеристика которых может принимать любое значение . При этом среди построенных примеров имеются поверхности любого рода. Метод построения таких поверхностей был указан Ж.Адамаром в 1898 г.

Заметим прежде всего, что если F - гиперболический параболоид, то , а если F - однополостный гиперболоид, то . Будем строить теперь поверхность F, для которой .

Возьмем два однополостных гиперболоида вращения  и , заданных уравнениями



Гиперболоиды  и  пересекаются в плоскости Q:  по гиперболе. Пусть поверхность  получена из  и  следующим образом: от  отрезана часть, лежащая в двугранном угле , ; от  отрезана часть, лежащая в двугранном угле , ; оставшиеся части склеены по ветви  гиперболы , лежащей в верхней полуплоскости плоскости Q (рис.19). Вдоль  поверхность  имеет седлообразное ребро, а ниже плоскости P:  по другой ветви гиперболы - самопересечение.



Сгладим ребро поверхности . Плоскость R:  пересекает  над отрезком  по кривой , заданной уравнением

  (3)

Над отрезком  зададим функцию

 (4)

такую, что выполняются равенства

 (5)

Коэффициенты  определяются равенствами (5). На интервале  зададим функцию

 (6)

Из равенств (3)-(6) следует, что  и . Легко подсчитать, что . В полосе U:  на плоскости Р определим функцию

. (7)

Ее графиком будет поверхность  отрицательной кривизны, поскольку

. (8)

Над полосой :  поверхность  совпадает с гиперболоидом , а над полосой :  - с гиперболоидом . Поэтому, заменяя над полосой U часть поверхности , лежащую выше плоскости Р, поверхностью , получим поверхность , в каждой точке которой гауссова кривизна отрицательна. У поверхности F эйлерова характеристика .

Очевидно, что, увеличивая число исходных гиперболоидов и сглаживая различное число получившихся ребер, можно получить поверхность F любой эйлеровой характеристики  и любого рода с любым числом бесконечно удаленных точек  (рис.20) Регулярность сглаживания можно повысить до класса  за счет последующего приближения средними функциями.



Для сглаживания плоских ребер седловых поверхностей ряд общих способов был разработан Э.Р.Розендорном. В 1961 г. им был построен пример, опровергнувший считавшуюся весьма правдоподобной до того времени гипотезу о том, что любая полная седловая поверхность в  будет неограниченной. Построение такого примера потребовало проведения серии трудоемких вычислений. Не воспроизводя их здесь, приведем достаточно детальную схему построения примера Э.Р.Розендорна.

Возьмем числовую последовательность  с такими свойствами:

 (9)

Построим в  систему концентрических сфер  с радиусами  и центром в фиксированной точке О. Предельная для  сфера S имеет радиус R. Построим в  граф G, состоящий из прямолинейных отрезков и обладающий следующими свойствами:

) граф G гомеоморфен графу Г - универсальной накрывающей букета двух окружнотей;

) узлы ранга  графа G лежат на сфере  (полагаем, что );

) любые четыре точки - концы четырех отрезков, исходящих из одного узла  графа , - будут вершинами тетраэдра, внутр которого лежит узел ; тетраэдр, внутри которого лежит точка , правильный;

) длина любого звена ранга  графа G, т.е. звена, соединяющего узел ранга  с узлом ранга , больше ;

) граф G не имеет самопересечений.

Граф G может быть построен. Отметим, что условие 4) указывает на то, что углы между звеньями ранга  и радиусами сфер , проведенными в их концы, стремятся к , когда . Из соотношений (9) вытекает, что длина ломаной , соединяющей точку  с О, стремится , когда точка А уходит к сфере S, т.е. граф G полон относительно своей внутренней метрики. Граф G является как бы "скелетом", вокруг которого будет построена искомая полная седловая поверхность. Эта поверхность состоит из однотипных деталей. Опишем строение такой детали. Возьмем правильный тетраэдр Т с вершинами в точках . Впишем в Т четыре конуса  с вершинами в точках , направляющими которых будут окружности, вписанные в грань, противоположную вершине . Возьмем конус  и через ребра  проведем плоскости, делящие пополам соответствующие двугранные углы тетраэдра Т. Эти плоскости отсекут от  некоторую часть  с вершиной в точке , ограниченную тремя дугами эллипсов с концами в центрах граней  (рис.21). Аналогично определяются части , ,  конусов , , . Построим поверхность .



Поверхность  имеет четыре конические точки  и шесть плоских седловых ребер, лежащих на краях поверхностей . Если из  удалить точки  и сгладить плоские седловые ребра, то можно поучить гладкую седловую поверхность Р, у которой четыре граничные точки  (рис.22).



Теперь на каждом звене  графа G фиксируем некоторую точку . Четыре точки , лежащие в звеньях , имеющих общую вершину , будут вершинами тетраэдра . Пусть  - аффинное преобразование, переводящее Т в , а . Построим "поверхность"

. (10)

(Множество  не будет поверхностью, так как точки  не имеют на  окрестности, гомеоморфной кругу.) В окрестности каждой точки  исправим "поверхность" , заменив некоторую часть этой "поверхности" седловой кольцевой поверхностью, касающейся . Сделав все такие замены, получим искомую полную гладкую седловую поверхность F, лежащую внутри сферы S (рис.23).



Указанные выше построения можно несколько изменить и получить в  полную седловую поверхность класса , лежащую внутри S, у которой гауссова кривизна обращается в нуль лишь на счетном множестве изолированных точек, соответствующих центрам граней тетраэдров .

В 1915 г. С.Н.Бернштейн исследовал строение полных седловых поверхностей, заданных уравнением  над всей плоскостью.

Теорема 1: Пусть поверхность F задана в  уравнением

, (11)

где  и определена на всей плоскости . Если гауссова кривизна К поверхности Р неположительна и имеются точки, в которых К<0, то

. (12)

При доказательстве этой теоремы фактически используется лишь седлообразность поверхности F. Это позволило Г.М.Адельсону-Вельскому доказать следующее обобщение теоремы С.Н.Бернштейна.

Теорема 2: Пусть седловая поверхность F в  задана уравнением , где непрерывная функция  определена на всей плоскости . Тогда, если , то F - цилиндрическая поверхность.

Кроме того, С.Н.Бернштейн получил следующее обобщение теоремы 1.

Теорема 3: Если поверхность F удовлетворяет условиям теоремы 1, то возможно указать такое , что неравенство



не осуществимо для всех , каково бы ни было данное число .

В качестве приложения теоремы 1 приведем теорему Бернштейна о минимальных поверхностях в . Напомним, что минимальной поверхностью называется поверхность, на которой средняя кривизна .

Теорема 4: Если минимальная поверхность  задана над всей плоскостью  уравнением , то F является плоскостью.

.2 Неограниченность седловых трубок

Поскольку в  нет замкнутых седловых поверхностей, то вопрос о неограниченности полных седловых поверхностей сводится к получению достаточных условий неограниченности седловых трубок в . То, что существуют ограниченные седловые трубки в , показывает пример Э.Р.Розендорна.

Перейдем к специальному классу седловых трубок - седловым рогам. Именно, ниже будет доказана теорема о том, что в  неограничен любой регулярный седловой рог Т. Установление этого результата распадается на два случая, различных по способу доказательства. Сначала рассматривается такой рог Т, на котором точная нижняя грань длин поясов , а затем рог, для которого . Если , то рог Т называем острым, а если , то неострым.

Теорема 5 (Ю.Д.Бураго): Если Т - седловой рог класса  в  и , то рог Т неограничен в  [2,399].

Теорема 6 (А.Л.Вернер): Острый седловой регулярный (класса ) рог Т в  неограничен [2,403].

Для доказательства данной теоремы потребуются следующие леммы.

Лемма 1: Особая точка А на ограниченном остром седловом роге Т не может быть отсекаема.

Лемма 2: Пусть F - полная поверхность или трубка в , заданная -погружением f: Ф. Если неориентированное сферическое отображение :Ф относительно некоторого непустого открытого множества G имеет кратность не больше , то множество всех предельных точек для всевозможных расходящихся последовательностей  нигде не плотно в G, и F неограничена в .

Доказательство теоремы 6. Допустим, что Т ограничен в . Тогда, в силу леммы 1 особая точка А рога Т неотсекаема, и Т А будет седловой поверхностью с краем L и одной особой точкой - точкой А.

Можно считать, что краем рога Т будет кривая L , состоявшая из конечного числа  плоских выпуклых дуг , . Такую кривую L можно построить из выпуклых дуг нормальных сечений рога Т, не идущих в асимптотических направлениях. Для любой плоскости Р в  множество РL имеет не более  компонент, так как каждое множество Р имеет не более двух компонент.

Покажем, что отображение  имеет конечную кратность.

Так как точка А неотсекаема, то граница  каждой компоненты G множества  или  имеет дугу на окружности Г=, а потому общее число компонент в  и  при любых  и  не больше . В частности, к точке О в множествах  и  подходит не более чем  компонент, т.е. точку А можно рассматривать на Т как седловую точку, в которой порядок седлообразности не выше .

Фиксируем некоторое направление . Пусть Т лежит между плоскостями  и , . Обозначим через  число компонент множества . Очевидно, , а . Будем увеличивать  от  до  и следить за изменением . Значение  увеличивается на 1 за счет появления новой компоненты каждый раз, когда  локально опорна к L относительно некоторой компоненты , причем в окрестности компоненты  кривая L лежит выше , т.е. в точке минимума проекции кривой L на . Число таких точек на L обозначим через . Очевидно, .

Уменьшение значения  происходит при всех , когда плоскость  касается Т, на единицу для каждой точки касания и при , когда  проходит через точку А. В последнем случае  уменьшается на , где  - число компонент множества , на границе которых лежит точка О.

Если через  обозначить число точек на Т, включая и точки на L, в которых касательные плоскости к Т ортогональны к , то получим, что

.

Следовательно,

.

Из этого следует, что  имеет на  кратность не выше . В силу леммы 2, рог Т должен быть неограничен. Получили противоречие. Теорема доказана.

Из теорем 5 и 6 вытекает общий результат о седловом роге.

Теорема 7: Регулярный седловой рог неограничен в .

Эта теорема позволяет детально изучить внешнее строение седлового рога. Это изучение было проведено А.Л.Вернером.

Лемма 3: Минимизирующая последовательность поясов  на регулярном седловом роге  расходится в , т.е. не содержит никакой ограниченной в  подпоследовательности.

Лемма 4: Пусть Т - регулярный седловой рог в ,  - минимизирующая последовательность поясов на Т и А - любая фиксированная точка в . Если точка , то любая последовательность отрезков  сходится к некоторому лучу  при .

Лемма 5: Регулярный седловой рог внешне полон в , т.е. любая последовательность точек, расходящаяся на роге, расходится в .

Лемма 6: Пусть рог Т в  удовлетворяет условиям, сформулированным выше. Если выпуклая кривая  - граница , то Т лежит внутри цилиндра С с направляющей  и образующими, параллельными лучу .

Теорема 8: Пусть Т - регулярный седловой рог в . Тогда для любой точки А и любой последовательности точек ,расходящейся на Т, отрезки  сходятся к некоторому лучу - направлению рога Т. Рог Т лежит внутри замкнутого цилиндра, образующие которого параллельны лучу  [2,405].

Теорема 9: Пусть Т - регулярный седловой рог в . Тогда, если вращение рога , то множество  будет окружностью  большого круга на единичной сфере , плоскость которого перпендикулярна направлению рога Т. Если , то или , или будет дугой на , не меньшей полуокружности [2,406].



Замечание: Пример полной поверхности F отрицательной кривизны, имеющей рог, для которого , заданной в цилиндрических координатах  уравнением показывает, что  может быть полуокружностью (рис.24). Поверхность F имеет однолистное сферическое изображение. Отметим еще, что если , то плоские пояса на Т имеют самопересечения.

3.3 Проблема Плато

Проблема Плато формулируется следующим образом: Дана некоторая замкнутая кривая. Требуется провести через эту кривую поверхность с минимальной площадью. На искомых поверхностях должно иметь место соотношение . Уравнение  представляет собой дифференциальное уравнение экстремалей нашей вариационной задачи. Поверхности с тождественно равной нулю средней кривизной, так как они являются решениями минимальной задачи Плато, называются минимальными поверхностями. Исследованиями, относящимися к минимальным поверхностям, занимались Лагранж, Монж, Риман, Вейерштрасс, Шварц, Бельтрами, Ли и Рибокур. Если заранее ограничиться только аналитическими поверхностями, то определение минимальных поверхностей можно легко свести к нахождению изотропных кривых. Введем на некоторой кривой поверхности два семейства изотропных кривых, для которых , в качестве параметрических линий. Будем иметь , и для средней кривизны мы получим :

.

Если , то должно иметь место соотношение . Дифференцируя соотношения ,  по  и , мы получим  и . Учитывая равенство , где  - единичный вектор нормали, имеем:  линейно независимы. Отсюда следует, что  тождественно обращается в нуль. Мы имеем, следовательно, . В силу равенства  получаем .

Найденный результат можно выразить следующим образом: минимальные поверхности являются поверхностями сдвига, направляющими которых служат изотропные кривые. Таким образом интегрирование дифференциального уравнения  сводится к определению изотропных кривых.

.4 Полные седловые поверхности со взаимно однозначным сферическим изображением

Если регулярная ориентируемая поверхность F в  имеет локально топологическое сферическое отображение , то гауссова кривизна К на F не меняет знака. На основе этого А.Л.Вернер предложил следующую классификацию сферически однолистных седловых поверхностей.

Будем считать, что поверхность F полная. Тогда, если К, то F - выпуклая поверхность, а потому  взаимно однозначно. Если К, то у F может быть любая эйлерова характеристика .

Рассмотрим полные регулярные (класса ) седловые поверхности с взаимно однозначным сферическим отображением. Класс таких поверхностей обозначим через Е. Поверхности этого класса называются сферически однолистными седловыми поверхностями.

Вместе с полными выпуклыми поверхностями сферически однолистные седловые поверхности образуют класс полных поверхностей с взаимно однозначным сферическим отображением.

Лемма 1: На сферически однолистной седловой поверхности не существует двух непересекающихся простых замкнутых геодезичесаких [2,420].

Будем считать, что поверхность  определяется в  погружением f:. Поскольку F и W гомеоморфны области , то F и W имеют род нуль. Поэтому можно считать, что W будет сферой , из которой удалено конечное число точек  - бесконечно удаленных точек многообразия W. При этом  , так как . Точки  будем называть также бесконечно удаленными точками поверхности F. Каждой бесконечно удаленной точке  на F соответствует трубка , имеющая  своей бесконечно удаленной точкой. Трубка  может быть рогом или чашей. Поэтому про каждую бесконечно удаленную точку  будем говорить, что она соответствует рогу или чаше на F. Трубки на F считаем эквивалентными, если они имеют одинаковые бесконечно удаленные точки, и неэквивалентными в противном случае.

Граница  сферического образа  поверхности F имеет столько же компонент , , сколько бесконечно удаленных точек у поверхности F. Мы полагаем, что компонента  соответствует точке , т.е. является множеством  для трубки  с бесконечно удаленной точкой , и называем  сферическим изображением бесконечно удаленной точки .

Допустим, что точка  соответствует рогу . Тогда множество  будет либо большой окружностью на , когда  имеет ненулевое вращение , либо дугой большой окружности, не меньшей полуокружности, когда .

Так как множества  попарно не имеют общих точек, то из сказанного выше и свойства сферического образа геодезического вытекает

Лемма 2: На поверхности  может быть не более одной бесконечно удаленной точки, соответствующей рогу ненулевого вращения. Если такая точка имеется, то остальные бесконечно удаленные точки поверхности F соответствуют чашам и на F не существует простой замкнутой геодезической [2,420].

Рассмотрим допустимые случаи для F по возможному числу неэквивалентных рогов или чаш на F.

). Поверхность F гомеоморфна , имеет единственную бесконечно удаленную точку , и эта точка соответствует чаше. Примером будет гиперболический параболоид (рис.25).



2) . Поверхность F гомеоморфна цилиндру  и имеет две бесконечно удаленные точки  и . Хотя бы одной из них соответствует чаша. Следовательно, возможны такие случаи:

а) Каждой бесконечно удаленной точке  и  соответствует чаша, пример: однополостный гиперболоид (рис.26);



б) Одной бесконечно удаленной точке, скажем точке , соответствует рог ненулевого вращения, а точке  - чаша. Пример: поверхность F: . В этом случае  - большая окружность на , а потому  лежит в одной полусфере, ограниченной .

в) Точке  соответствует рог нулевого вращения, а точке  - чаша. Пример: поверхность, заданная уравнением . Поверхность рассматриваемого типа всегда имеет самопересечения.

) . На поверхности F должна быть чаша. Но на F не существует двух эквивалентных чаш. В силу леммы 2 на F также не может быть рога ненулевого вращения, так как на F есть геодезический цикл, гомотопный поясам чаши поверхности F. Следовательно, в рассматриваемом случае одна бесконечно удаленная точка поверхности F соответствует чаше, а две другие - рогам ненулевого вращения.

) . Если бы F имела хотя бы одну чашу, то на F существовали бы два непересекающихся геодезических цикла: один из них был бы гомотопен поясам на этой чаше, а другой отделял бы на F одну пару бесконечно удаленных точек от другой. Это невозможно в силу леммы 1. Поэтому на F нет чаш, и, в силу леммы 2, все рога могу иметь лишь нулевое вращение. То, что таких поверхностей не существует, доказано П.Ш.Речевским и С.З.Шефелем.

Таким образом, поверхность  может принадлежать лишь одному из пяти перечисленных подклассов: 1), 2а), б), в) и 3), причем пока не найдено примеров поверхностей подкласса 3).

Среди поверхностей этих подклассов наиболее простыми и геометрически наглядными свойствами обладают поверхности, у которых имеется рог ненулевого вращения, т.е. поверхности подкласса 2б). Рассмотрим такую поверхность.

Теорема: Пусть F - сферически однолистная седловая поверхность, имеющая рог с ненулевым вращением. Если  - декартовы координаты в  и ось  имеет направление рога поверхности F, то в этих координатах F можно задать уравнением , причем областью задания функции  - проекцией F на плоскость Р: - будет область , где М - ограниченное замкнутое выпуклое множество на Р, соответствующее бесконечно удаленной точке рога поверхности F.

Доказательство. Будем считать, что F задана погружением , причем , точка  соответствует рогу, а точка  - чаше поверхности F. Сферическое изображение  бесконечно удаленной точки  рога будет экватором на сфере . Мы считаем, что F ориентирована так, что ее сферический образ  лежит в верхней полусфере  сферы .

Пусть плоскость Q параллельна оси z, а (Q) - полный прообраз множества FQ в W. Плоскость Q не может быть касательной к F. Поэтому компоненты множества (Q) не имеют точек ветвления. Среди этих компонент нет замкнутых кривых, так как образ такой компоненты на F имел бы вертикальную касательную прямую, а тогда F имела бы вертикальную (т.е. параллельную оси z) касательную плоскость, что невозможно. Поэтому компонентами (Q) могут быть лишь простые дуги с концами в точках  и . Образами этих компонент на F будут простые незамкнутые кривые, полные относительно F. Они не имеют вертикальных касательных, а потому каждая такая кривая однозначно проектируется на Р.

Пусть  - компонента (Q). Из свойств седлового рога (теорема 8, пункт 2.2) вытекает, что  не может иметь оба конца в , поэтому возможны два случая.

а) Оба конца  лежат в точке . Тогда проекцией  на Р будет прямая, так как s бесконечна по длине в обе стороны, и касательные к s образуют с Р углы, не большие некоторого .

б) Дуга  идет от точки  к точке . В этом случае в одну сторону s уходит на рог, и потому ее проекция на Р с этой стороны ограничена, а в противоположную сторону проекция s на Р снова неограниченна, т.е. в этом случае проекций s на Р будет луч.

Теперь будем пересекать F плоскостями Р(): z=. Среди таких плоскостей разве лишь одна будет касательной к F. Поэтому найдется такое , что для  в множестве , где , компоненты не имеют точек ветвления и одна из компонент  будет циклом, внутри которого лежит точка  (теорема 8, пункт 2.2). На F образом цикла  будет пояс , отсекающий от F рог Т. Так как F не допускает отрезания горбушек, то лишь одна компонента в  может быть циклом. Поскольку рог Т уходит в направлении оси z, то внутри  нет других компонент множества . Пусть замкнутая выпуклая кривая , а С - выпуклый цилиндр с направляющей G и образующими, параллельными оси z. Рог Т лежит внутри С. Обозначим через  часть поверхности F, лежащую вне С.

Из отмеченных выше свойств проекции кривой  на Р легко следуют, что проекцией части  на Р будет множество Р\.

Рассмотрим теперь множество . Пусть  - его прообраз в W. Множество  компактно в W. Поэтому его компонентами могут быть лишь циклы. Образы этих циклов на F не могут иметь вертикальных касательных, а потому все кривые из  имеют внутри точку , т.е. их образы будут поясами на F. Если бы  имело более одной компоненты, то на F нашлась бы такая кольцевая область U, граница которой состояла бы из двух замкнутых кривых, лежащих на С. Очевидно, U лежит внутри С, так как U не допускает отрезания горбушек. Пусть  - проекция U на Р. Возьмем точку Х, лежащую на границе множества , но не на G, и проведем через Х прямую  параллельно оси z. Прямая  будет касательной к F, а потому на U имеется вертикальная касательная плоскость, что р

Каждая образующая цилиндра С пересекает , а значит и F, в одном и том же числе точек. Это число (обозначим его через ) равно числу оборотов  вокруг цилиндра. Оно будет одним и тем же для любого цилиндра C, внутри которого лежит С, а потому одним и тем же для всех , когда .

Гладкие циклы  и  гомотопны в W, причем  лежит внутри . Пусть  - замкнутая область в W между  и , а D - ее образ на F. Множество D можно разбить на конечное число таких частей , каждая из которых однозначно проектируется на Р. Соединим внутри  кривые  и  однопараметрическим семейством гладких кривых , где , , , причем при  кривые  сходятся к  вместе с касательными. Через  обозначим образы кривых  на F.

Пусть  и  - проекции  и  на Р. Дуга кривой , лежащая внутри , не имеет самопересечений. Поэтому при согласованных обходах кривых  вращение полей касательных кривых  у всех одно и то же и равно вращению поля касательных кривой , т.е. равно . А тогда у плоской кривой  вращение поля внешних нормалей также равно . Но нормали к  являются проекциями на Р нормалей к F в соответствующих точках кривой . Так как сферическим изображением кривой  будет жорданова кривая , для достаточно больших  сколь угодно близкая к экватору , то вращение поля нормалей к  равно +1, т.е. . А это означает, что F взаимно однозначно проектируется на Р.

Проекцией F на Р или, что то же самое, на Р будет такая область , что замкнутое множество  будет односвязно и ограничено. Множество М будет выпуклым. В противном случае от F можно было бы вертикальной плоскостью Q отсечь часть U, ограниченную плоской кривой L, прообраз которой в W имеет оба конца в точке , что невозможно, как доказано выше. Итак, М выпукло. Теорема доказана.

Заключение

В данной работе я рассмотрела теоретические аспекты, связанные с поверхностями с постоянным типом точек, в частности вопросы, касающиеся выпуклых и седловых поверхностей. Познакомилась с классификацией точек регулярной поверхности, с некоторыми свойствами внешней геометрии выпуклых и седловых поверхностей, рассмотрела связь поверхностей с постоянным типом точек с теорией сферического изображения и теорией кривизны.

Материал работы может быть использован студентами при получении высшего профессионального образования, а также преподавателями для проведения учебных занятий.

Список литературы

.Александров А.Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. - М.: ОГИЗ, 1948.

.Бакельман И.Я., Вернер А., Л., Кантор Б.Е. Введение в дифференциальную геометрию "в целом". - М.: Наука, 1973.

.Бляшке В. Дифференциальная геометрия. - М.:ОНТИ, 1935.

.Вернер А.Л. О внешней геометрии простейших полных поверхностей неположительной кривизны. - М., 1968.

.Дубровин А.А. О регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой в пространствах постоянной кривизны. - Укр., 1965.

.Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. - М.:Наука,1979.

.Ефимов Н.В. Возникновение особенностей на поверхностях отрицательной кривизны. - М., 1964.

.Кон-Фоссен С.Э. Изгибаемость поверхности "в целом". - М.:УМН, 1936.

.Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. - М.: ФИЗМАЛИТ, 2004.

.Норден А.П. Теория поверхностей. - М.: Гостехиздат, 1956.

.Погорелов А.В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. - М.: Наука

.Погорелов А.В. Изгибание выпуклых поверхностей. - М.: Гостехиздат

.Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия: Первое знакомство. Изд. 2-е, исправл. и доп. - М.: Едиториал УРСС, 2003.

.Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. - М.: Гостехиздат, 1956. поверхность сфера кривизна седловой

.Розендорн Э.Р. О полных поверхностях отрицательной кривизны в евклидовых пространствах. - М., 1962.

.http://slovari.yandex.ru/dict/bse/article/00015/74000.htm