**Спектральные характеристики**

# Демидов Р.А., ФТФ, 2105

# Введение

В первой части работы я поставил себе цель описать линейные операторы в целом, а также подробно рассказать о важной характеристике спектра операторов – спектральном радиусе.

В этой части работы я подробнее остановлюсь на не менее важной характеристике спектров – резольвенте, и расскажу о связи этой характеристики с подвидами спектра оператора – с остаточным, точечным и непрерывными его частями. Вначале, опять же, необходимо остановиться на некоторых основных определениях и понятиях теории линейных операторов. Итак:

* Пусть A - оператор, действующий в конечномерном линейном пространстве E. *Спектром оператора* называется множество всех его собственных значений.
* Квадратную матрицу n×n можно рассматривать как линейный оператор в n-мерном пространстве, что позволяет перенести на матрицы «операторные» термины. В таком случае говорят о *спектре матрицы*.
* Пусть A - оператор, действующий в банаховом пространстве E над полем k. Число λ называется *регулярным* для оператора A, если оператор R(λ) = (A − λI)-1, называемый *резольвентой оператора* A, определён на всём E и непрерывен.
* Множество регулярных значений оператора A называется *резольвентным множеством* этого оператора, а дополнение резольвентного множества - *спектром этого оператора.*
* Максимум модулей точек спектра оператора A называется *спектральным радиусом* этого оператора и обозначается через r(A). При этом выполняется равенство:



Это равенство может быть принято за определение спектрального радиуса,приусловии существования данного предела.

Теперь рассмотрим состав самого спектра. Он неоднороден, и состоит из следующих частей:

* *дискретный (точечный)* спектр - множество всех собственных значений оператора A - только точечный спектр присутствует в конечномерном случае;
* *непрерывный спектр* - множество значений λ, при которых резольвента (A - λI)-1 определена на всюду плотном множестве в E, но не является непрерывной;
* *остаточный спектр* - множество точек спектра, не входящих ни в дискретную, ни в непрерывную части.

Таким образом, мы видим, что спектр оператора состоит из 3-х больших частей, принципиально различных.

# Свойства резольвенты

**Теорема 1**: ограничен. Тогда  является регулярной точкой.

**Доказательство.** . Пусть. Тогда .

- банахово, , причем он ограничен:



Резольвента существует и ограничена. Чтд.

**Теорема 2:** не принадлежит точечному спектру осуществляет биекцию на .

**Доказательство.**

* Если построена биекция, то не существует , за исключением тривиальной.
* Если - точка точечного спектра, то , что противоречит биективности .

**Теорема 3:** **(Тождество Гильберта)** 

**Доказательство.**

,,

,верно => Чтд.

**Следствия:**

1.  - коммутативность резольвенты.
2.  (т.к. непрерывна по в точке ), т.е. она бесконечно дифференцируема (аналитическая функция).

Итак, - аналитическая оператор-функция на множестве регулярных точек (резольвентном множестве). - разложение в ряд Лорана (имеет место при , но, возможно, и в большей области).

**Упражнение: (Примеры вычисления спектрального радиуса)**

**,**

.

Возьмем.Тогда



Таким образом . Эта оценка достижима при  , т.е. ,и *rc(A)*=1.

**Теорема 4:** всякая к.ч , есть регулярная точка самосопряженного оператора A.

**Доказательство.**

] регулярная точка, значит не собственное значение и . Проверим ограниченность .





ограничен,  и его можно распространить на с сохранением нормы оператора, так как  не собственое значение. Если при этом  не замкнуто, то  не замкнут. При этом линейный оператор, обратный к замкнутому, а также сопряженный к нему, замкнут => самосопряженный оператор замкнут.

# Спектральная теория в электронике

Полезнейшим приложением спектральной теории в физике является теория спектров электрических сигналов. Суть теории состоит в том, что любой сигнал на входе линейной цепи возможно представить совокупностью гармонических колебаний, или тестовых сигналов, заданной частоты, вопрос такого разложения состоит в нахождении амплитуд результирующих колебаний. Последние вычисляются определенным образом.



Классическое преобразование Фурье представляет из себя линейный оператор.

Спектральная теория здесь работает следующим образом – для периодических входных сигналов для нахождения соответствующих амплитуд используется интегральное преобразование – дискретный Фурье- образ:









в котором разложение начинается с частоты следования wк. В данном случае очевидно, что, раз выходной сигнал представляется суммой бесконечного ряда, то мы имеем дело с **точечным спектром сигнала**, поскольку он дискретен. Следовательно, любое периодическое колебание можно рассматривать как сигнал с дискретным спектром, поскольку **непрерывным спектром** он не обладает. Однако, если же взять непериодический сигнал, например, единичный прямоугольный импульс, то вводится понятия прямого **и обратного преобразований Фурье**:

 ,

где S(w) – **спектральная плотность** сигнала s(t).

Соответственно, S(w) – непрерывная по w функция, и в данном.

**Заключение**

В работе не ставилась цель охватить весь курс спектральной теории и спектрвльных характеристик, а ставилась цель изучить основные спектральные характеристики линейных операторов, и обрисовать применение этих понятий. Опять же, класс Фурье преобразований включает в себя намного больший объем, чем тот, о котором упомянуто в работе, они используются в теории алгоритмов при кодировке и сжатии информации в цифровом формате изображений JPEG, в вейвлет - преобразованиях. Новое поколение функциональной электроники содержит на элементарном уровне элементы, способные производить непрерывные преобразования Фурье и Лапласа, что намного ускоряет работу электронных устройств.

В общем и целом, наряду с первой частью работа дает представление о б основных спектральных характеристиках линейных операторов и их применении в различных областях математики, информатики и физики.

**Список литературы**

1. Лекции по математической физике, Попов И.Ю., СПбГУ ИТМО, кафедра высшей математики.
2. Элементы теории функций и функционального анализа, А.Н. Колмогоров и С.В. Фомин.
3. Теория цепей и сигналов, Новиков Ю.Н.
4. Свободная энциклопедия Википедия.
5. Сжатие данных, изображения и звука, Д. Сэломон.