**Спектри і спектральний аналіз**

**1. Спектри: визначення і класифікація**

Відповідно формули ряду Фур'є маємо:

 (1)

Тут  – основна частота. Як бачимо, складна періодична функція  цілком визначається сукупністю величин  і . Сукупність величин  зветься спектром амплітуд. Сукупність величин  називається відповідно спектром фаз. Для багатьох застосувань досить знати спектр амплітуд; він застосовується настільки часто, що коли говорять про спектр, то мається на увазі саме амплітудний спектр. В інших випадках роблять відповідні застереження. Ми робитимемо так само.

Спектр періодичної функції можна зобразити графічно. Виберемо для цього координати  і .

Спектр буде зображений у цій системі координат сукупністю дискретних точок, оскільки кожному значенню  відповідає одне визначене . Графік, що складається з окремих точок, незручний. Тому прийнято зображати амплітуди окремих гармонік вертикальними відрізками відповідної довжини.

У результаті спектр періодичної функції приймає вигляд, показаний на рис. 1. Це – дискретний спектр; його називають також лінійчастим, запозичивши цей термін з оптики.

Друга властивість спектра, зображеного на рис.1, полягає в тому, що спектр – гармонійний. Це означає, що він складається з рівновіддалених спектральних ліній; частоти гармонік знаходяться в простих кратних співвідношеннях. Зазвичай окремі гармоніки, іноді навіть перша, можуть бути відсутніми, тобто амплітуди їх можуть дорівнювати нулю; це, однак, не порушує гармонійності спектра.

Не слід вважати, що тільки періодична функція має дискретний спектр. Припустимо, наприклад, що складне коливання є результатом додавання двох синусоїдальних коливань з непорівнянними частотами, скажімо,  та . Це коливання свідомо неперіодичне, однак спектр його дискретний і складається з двох спектральних ліній.

Функція, що володіє дискретним спектром з довільно розташованими за частотою спектральними лініями, називається майже періодичною.

Отже, дискретні чи лінійчасті спектри можуть належати як до періодичних, так і до неперіодичних функцій. У першому випадку лінійчастий спектр обов'язково гармонійний.

Велике практичне значення має окремий випадок майже періодичної функції, що подається розкладанням виду

 ,

де  приймає як позитивні, так і негативні значення. Спектр, що відповідає цьому розкладанню, характеризується тим, що лінії його еквідистантні; тому ми називатимемо такого роду лінійчастий спектр квазігармонійним. Такі, наприклад, спектри періодичних модульованих коливань;  у цьому випадку є не що інше, як несуча частота.

Звернемося тепер до спектрів неперіодичних функцій. Ми вже знаємо, що в результаті граничного переходу від ряду до інтеграла Фур'є інтервали між окремими лініями необмежено скорочуються, лінії зливаються, і замість дискретних точок спектр має зображуватися безперервною послідовністю точок, тобто безперервною кривою. Такого роду спектр називається суцільним. На рис. 2 наведений приклад спектрального розкладання ЕЕГ.

Проте тут потрібно ввести одне уточнення. Ми писали формулу для інтеграла Фур'є у вигляді

 (2)

Підінтегральна функція виражає окремий нескінченно малий доданок, тобто коливання з нескінченно малою амплітудою :

 ,

 .

Таким чином, величина  виражає не безпосередньо амплітуду, а так звану спектральну щільність. Однак зазвичай цю деталь опускають і називають  комплексним спектром неперіодичної функції, а абсолютне значення (модуль) цієї величини  – просто спектром. Це може призвести до непорозумінь лише в тому випадку, коли ми безпосередньо порівнюватимемо співвідношення для періодичних і неперіодичних функцій.

Отже, ми маємо два різновиди спектрів: лінійчасті і суцільні. Гармонійні лінійчасті спектри належать періодичним функціям, суцільні – неперіодичним.

Насамкінець зазначимо, що тими чи іншими функціями можуть виражатися зміни різних фізичних величин. Наприклад, спектри механічних величин: зсуву, швидкості, прискорення, сили, тиску тощо; електричних величин: струму, напруги і т.д. Крім того, нас часто цікавлять спектри квадратичних величин: потужності й енергії.

**2. Деякі теореми про спектри**

Виведемо тепер декілька загальних теорем про спектри, заснованих на властивостях перетворення Фур'є. Ці теореми подібні до теорем операційного числення і виводяться аналогічно: адже перетворення Фур'є і перетворення Лапласа, що складають основу операційного числення, споріднені між собою.

Насамперед відзначимо, що перетворення Фур'є лінійне. З цього безпосередньо випливає, що до нього можна застосувати принцип накладання. Цю обставину можна виразити таким співвідношенням:

 .(3)

Зміст співвідношення (3) може бути коротко виражений так: спектр суми дорівнює сумі спектрів.

Повернемося тепер до розгляду ЕЕГ. Симетричність (збіг ЕЕГ, знятих з відведень, розташованих у протилежних точках скальпа) характерна для нормальної ЕЕГ, вона є одним з істотних критеріїв діагностики. Разом з тим, ЕЕГ є випадковим процесом, тому, говорячи про збіг, розумітимемо збіг у середньому, тобто збіг характеристик процесів. Як таку характеристику виберемо спектр потужності ЕЕГ, потім знайдемо суму і різницю ЕЕГ симетричних відведень, потім визначимо спектр сумарного процесу і спектр різниці процесів. Виходячи з лінійності перетворення Фур'є, прояв симетричності буде в тому, що спектр сумарного процесу має значно перевершувати спектр різниці процесів. За відсутності симетричності спектри сумарного і спектр різниці процесів практично перекриватимуться. Зазначені припущення виявляються практично, що ілюструється рис. 3 і рис. 4.

Виведемо тепер вираз для комплексного спектра функції, що відрізняється від вихідної запізнюванням на час . Ми можемо записати

.

Шляхом простої заміни змінної за формулою  приходимо до результату

.

Якщо в цьому співвідношенні перейти від комплексних спектрів до їх модулів, то одержимо

,

тобто при запізнюванні – чи взагалі при зсуві функції за шкалою часу спектр її залишається незмінним. Інакше кажучи, спектр не залежить від вибору початкового моменту для відліку часу.

Наступна теорема відноситься до транспозиції (переносу) спектрів. Питання ставиться в такий спосіб: якій функції відповідає спектр, зміщений за шкалою частот по ?

Оскільки

,

то, отже, комплексний спектр вихідного виду буде властивий функції

.

Слід зазначити одну цікаву обставину. Застосовуючи розкладання Фур'є, ми маємо справу з парою перетворень Фур'є.

.

У цих формулах привертає увагу те, що час  і кругова частота  входять у них симетрично. Формули можуть бути зроблені цілком симетричними, якщо, змінивши визначення, рознести множник  на два інтеграли (тобто ввести в обох формулах множник ), що часто і роблять.

**3. Поточний спектр**

За основним визначенням спектральна щільність виражається формулою

.(4)

Таким чином, для знаходження спектра необхідно виконати інтегрування за часом у нескінченних межах. Це можливо, якщо функція  відома на всьому нескінченному відрізку осі часу. Але якщо функція  є відображення деякого реального фізичного процесу, що є об'єктом нашого спостереження, і якщо весь хід цього процесу не може бути чітко передбачений на підставі теоретичних розумінь, то відомості про функцію  ми одержуємо лише в результаті наших спостережень. Наприклад, ЕЕГ має досить коротку довжину в часі. Тому ми можемо виконати інтегрування не в нескінченних бокових границях, як цього вимагає визначення (4), а лише до необхідного поточного моменту.

Інтегрування може бути виконане в межах від  до поточного часу . Змінене в такий спосіб визначення спектра набуде виду

.(5)

Величина , що є функцією не тільки частоти, але й часу, називається поточним спектром.

У даних умовах спостереження процесу (чи сам процес) фактично може починатися в деякий момент , що знаходиться в минулому на кінцевому віддаленні від поточного моменту . У цьому випадку момент  може бути прийнятий за початок відліку часу, і ми можемо визначити поточний спектр у такий спосіб:

 . (6)

Ми надалі користуватимемося останнім визначенням спектра.

Зрозуміло, що пов'язування математичного визначення спектра з умовами реального експерименту само по собі має велике значення. Поняття поточного спектра є взагалі дуже плідним.

Ми розпочали викладання теорії спектрів зі спектра періодичної функції, що визначається співвідношенням .

Періодична функція є математичною абстракцією. Ця абстракція дуже корисна. Але треба мати на увазі, що не може існувати ніякого реального фізичного процесу, що відповідає визначенню (2). Будь-який дійсний процес має початок і кінець, і, отже, описується виразом виду (1) лише протягом кінцевого відрізку часу. Ми називаємо дійсний процес, що циклічно повторюється, періодичним, якщо цей процес триває досить довго. Мірилом тривалості є кількість періодів; тривалість велика, якщо кількість періодів набагато більше одиниці. Якщо взяти короткий відрізок процесу, то він зовсім не матиме періодичного характеру. Періодичність процесу виявляється не відразу; лише з часом виявляються характерні риси процесу. Поточний спектр саме й виражає зі спектральної точки зору цей розвиток процесу.

Спектр короткого відрізка процесу – за невеликий час від його початку – однорідний, оскільки короткий відрізок будь-якого процесу є просто коротким імпульсом. Якщо надалі відбувається періодичне повторення деякого циклу явища, то на поточному спектрі починають формуватися максимуми на основній частоті та її гармоніках. Ці максимуми стають все більш гострими і високими, а значення спектральної щільності в інтервалі між максимумами зменшується і – лише в границях, при , – суцільний поточний спектр вироджується в лінійчастий спектр періодичного в точному розумінні процесу.

Зазвичай при досить великих тривалостях процесу максимуми робляться настільки вузькими, що їх можна вже трактувати практично як лінії. Однак це не применшує принципового значення всього сказаного вище – періодичний процес є лише метою, до якої може прагнути з часом реальний процес, що повторюється.

Для з'ясування висловлених розумінь побудуємо поточний спектр синусоїди. Застосовуючи визначення (6) і підставляючи в нього , знайдемо

.(7)

Формулу (7) можна значно спростити, розглядаючи значення спектральної щільності для дискретних моментів

.

Підставивши це значення у (7), одержимо

,

і спектр

. (8)

У цій формулі знак  відноситься до парного , а знак  – до непарного . Величина  означає число напівперіодів синусоїди з моменту включення.

Невизначеність при  легко розкривається

 ,

тобто спектральна щільність на цій частоті наростає в часі лінійно.

Поточний спектр синусоїди, обчислений за формулою (8), поданий на рис. 5 у вигляді рельєфу. По горизонтальній осі, що лежить у площині креслення, відкладене відношення частот , по осі ординат – спектральна щільність; по горизонтальній осі, спрямованій від глядача – число напівперіодів . Це число, мабуть, пропорційне часу. Деталі на лівому схилі рельєфу опущені, щоб не ускладнювати креслення.

Рис. 5 чітко показує, що спочатку спектр виходить однорідним; лише поступово формується максимум на частоті ; цей максимум з часом стає все більшим і більш гострим. Лише в межі при  фігура перетвориться в дискретну спектральну лінію, якою ми зображуємо періодичне, синусоїдальне коливання. При цьому спектральна щільність на частоті  буде нескінченно великою. Це випливає зі співвідношення невизначеності Гейзенберга. Воно звучить так: чим менше тривалість імпульсу, тим ширше його спектр.

Найбільше поширення в клінічній практиці одержав метод дослідження спектральної щільності ЕЕГ. У цьому випадку визначаються співвідношення різних ритмічних складових. На дисплей виводяться дані за послідовні епохи, що викреслюються одне над одним, отримуючи таким чином тривимірний графік, що зображує зміну спектрального складу ЕЕГ у часі. Спектральні характеристики використовують для аналізу ЕЕГ нічного сну, для оцінки впливу прийому психотропних препаратів, прогнозу при порушеннях мозкового кровообігу, тобто для поліпшення діагностики психоневрологічних розладів. Спектри ЕЕГ мають велику інформативність (рис.6).

Спектральний аналіз дозволяє використовувати в діагностиці -ритм, який у рутинній електроенцефалографії практично не використовується, оскільки спостерігається у невеликої кількості здорових людей.